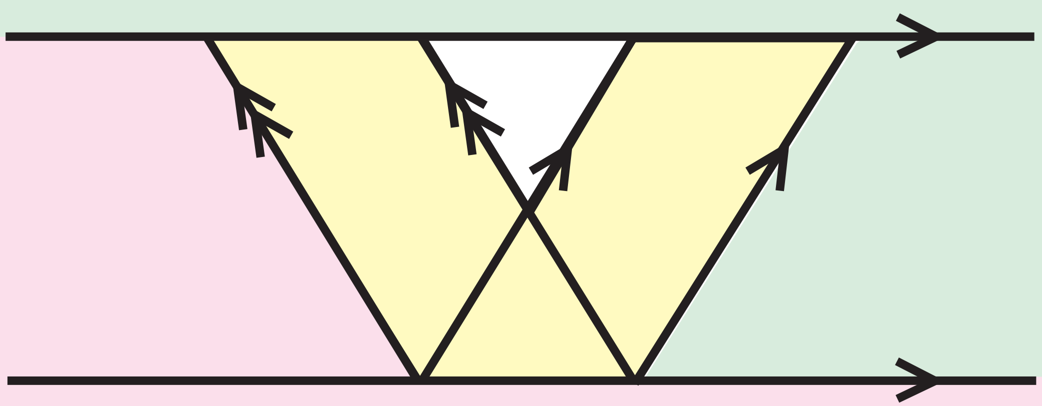
جمهورية السودان

وزارة التربية والتعليم

المركز القومي للمناهج والبحث التربوي - بخت الرضا

المرحلة المتوسطة

الرياضيات



الصف الأول

بسم الله الرحمن الرحيم

جمهورية السودان

وزارة التربية والتعليم

المركز القومي للمناهج والبحث التربوي – بخت الرضا

المرحلة المتوسطة

الرياضيات

الصف الأول

إعداد لجنة بتكليف من المركز القرمي للمناهج والبحث التربوي من الأساتذة:

د.الخطيب الطيب سيد أحمدحمدتوده	المركز القومي للمناهج والبحث التربوي
د. خالد محمد خالد يوسف	جامعة بخت الرضا
د. عبد المنعم محمود عبده عز الدين	الإشراف التربوي – ولاية الخرطوم
د. صالح يوسف محمد صالح	جامعة بخت الرضا

الإشراف العام :

أ . حبيب آدم حبيب	المدير العام بالإنابة
د . مبارك إسحق محمد يوسف	الأمين العام

الجمع بالحاسوب :

أ . حافظ محمد ابراهيم	المركز القومي للمناهج والبحث التربوي
أ . إلهام عبد الرحيم علي	المركز القومي للمناهج والبحث التربوي
أ . إقبال يوسف أحمد	المركز القومي للمناهج والبحث التربوي

الإخراج والتصميم الفني :

أ . ابراهيم الفاضل الطاهر محمد	خبير تربوي

الطبعة الأولى ٢٠٢١ م

المحتويات

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمة :

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على أشرف المرسلين سيدنا محمد وعلى آله وأصحابه أجمعين .

وبعد :

نقدم لكم أعزاءنا المعلمين والمعلمات وأولياء الأمور، وتلاميذنا وتلميذاتنا النجباء ، كتاب الرياضيات للصّف الأول من مرحلة التعليم المتوسط وفقاً لرؤية المؤتمر القومي للتعليم ٢٠٢٠م لتطوير مناهج التعليم ، وفق مدخل المعايير للمواد المنفصلة ، آخذين في الإعتبار توجهات التطورات المعرفية والتكنولوجية المتسارعة في جميع مجالات الحياة . وقد جاء المقرر امتداداً لمقرر الصف السادس إبتدائي وذلك وفقاً لما ورد في وثيقة ومصفوفات المدى والتتابع للمناهج الجديدة .

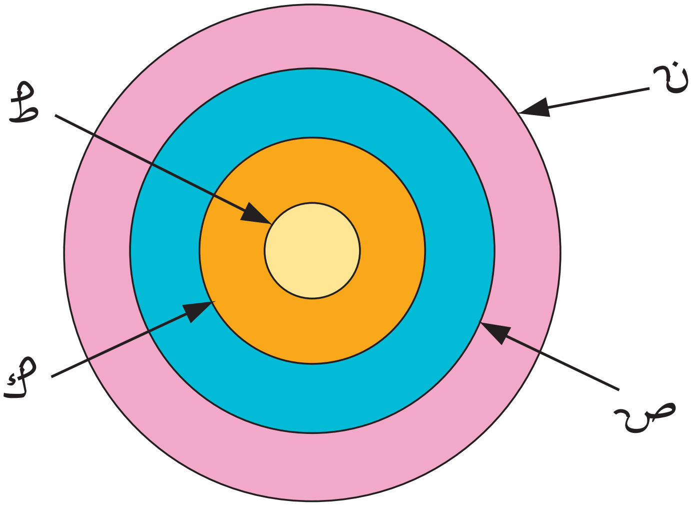
ونرجو من تلاميذنا وتلميذاتنا أن يحافظوا على هذا الكتاب ليستفيد منه من يجئ بعدهم . وأخيراً نسأل الله لكم التوفيق وأن يعينكم على تقديمه بالصورة التي تفيد التلميذ ، ونحن في انتظار نقدكم البناء لمحتواه مشاركة منكم في تطويره وتجويده .

والله الموفق

المؤلفون

الوحدة الأولى

مجموعة الأعداد النسبية



(١ - ١) العدد النسبي:

أدرس مجموعات الكسور التالية:

المجموعة الأولى: $\frac{٤}{٨}$ ، $\frac{٣}{٦}$ ، $\frac{٢}{٤}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، ...

المجموعة الثانية: $\frac{٨}{١٢}$ ، $\frac{٦}{٩}$ ، $\frac{٤}{٦}$ ، $\frac{٢}{٣}$ ، ...

المجموعة الثالثة: $\frac{-١٢}{٢٠}$ ، $\frac{٩}{-١٥}$ ، $\frac{-٦}{١٠}$ ، $\frac{-٣}{٥}$ ، ...

ماذا تلاحظ؟

ما أبسط كسر تؤول إليه الكسور في كل مجموعة؟ تؤول جميع الكسور المتكافئة عند كتابتها في أبسط صورة إلى صورة وحيدة، فمثلاً تؤول جميع عناصر المجموعة الأولى إلى الكسر $\frac{١}{٢}$ وكذلك تكتب عناصر المجموعة الثانية في أبسط صورة على النحو $\frac{٢}{٣}$ أما أبسط صورة لأي كسر في المجموعة الثالثة فهي $-\frac{٣}{٥}$. إن كل كسر من هذه الكسور ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $-\frac{٣}{٥}$) يسمى عدداً نسبياً .

> العدد النسبي هو الذي يمكن كتابته على صورة $\frac{أ}{ب}$ حيث أ ، ب ∈ ص و القاسم المشترك الأكبر لهما الواحد الصحيح ، ب ≠ صفر.

مجموعة الأعداد النسبية :

(١) ضع العدد الذي يجعل $\square + ٢ = ٥$ صحيحة
نجد أن العدد هو ٣ ، ٣ ∈ ط .

(٢) ضع العدد الذي يجعل $\square + ٥ = ٣$ صحيحة
نجد أن العدد هو −٢ ، −٢ ∉ ط ، ولكن −٢ ∈ ص .

(٣) ضع العدد الذي يجعل $٣ \times \square = ١٦$ صحيحة
نجد أن العدد هو $\frac{١٦}{٣}$ ، $\frac{١٦}{٣}$ ∉ ط ، $\frac{١٦}{٣}$ ∉ ص

لذلك لا بد من التفكير في توسيع مجموعة الأعداد الصحيحة بإضافة أعداد أخرى تمكننا من حل هذه المسألة و مثيلاتها.

هذه المجموعة الجديدة تسمّى مجموعة الأعداد النسبية، ويرمز لها بالرمز ن .

وتكتب بالصفة المميزة:

$$ن = \{ \frac{أ}{ب} : أ ، ب \in ص ، ب \neq ٠ \}$$

ويسمّى أ ، ب **حدّي العدد النّسبي**، كما يُسمَّى أ **بسط العدد النِّسبي**، ويُسمَّى ب **مَقَام العدد النِّسبي** .

لاحظ أن العدد ٥ يمكن كتابته على الصُّورة $\frac{٥}{١}$ ، وكذلك أي عدد صحيح آخر مثلاً ١٢ يكتب على الصُّورة $\frac{١٢}{١}$، وهكذا ،،، وهذا يعني أن الأعداد الصحيحة كلها أعداد نسبية.

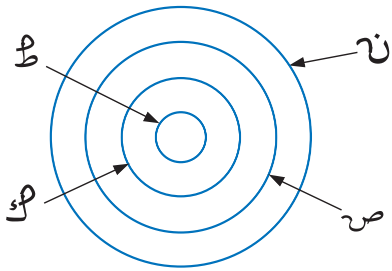
∴ مجموعة الأعداد الصحيحة هي مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد النسبية

ص ⊂ ن .

من دراستك السابقة تعلم أن:

ط ⊂ ك ، ك ⊂ ص ∴ ط ⊂ ك ⊂ ص ⊂ ن

وتوضح بأشكال فن هكذا :



مثال : إذا كان : $\frac{٥}{٢} = \frac{١٥}{س}$ جد قيمة س

الحل : $\frac{٥}{٢} = \frac{٥ \times ٣}{٢ \times ٣} = \frac{١٥}{٦}$ إذن $\frac{١٥}{٦} = \frac{١٥}{س}$ ∴ س = ٦

تمرين : (١ - ١)

جد قيم س في كل مما يلي:

أ/ $\frac{٢}{٣} = \frac{س}{١٥}$ ب/ $\frac{٧}{٤} = \frac{س}{١٢}$ جـ/ $\frac{س}{٣٠} = \frac{١}{٥}$

د/ $\frac{٦}{س} = \frac{٣}{٧}$ هـ/ $\frac{١٨}{س} = \frac{٩}{٦}$

(١ - ٢) : كتابة العدد النسبي بصور مختلفة - الكسور المتكافئة

اكتب زوجاً من الكسور المتكافئة ثم جد:

أ/ حاصل ضرب بسط الكسر الأول في مقام الكسر الثاني.

ب/ حاصل ضرب بسط الكسر الثاني في مقام الكسر الأول.

ماذا تلاحظ؟

كرر هذه العملية في أزواج أخرى من الكسور المتكافئة تعبّر عن هذه القاعدة.

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإن أ د = ب جـ

تسمّى هذه العملية بالضرب التبادلي، حيث يتضح منها أن حاصل ضرب الطرفين (أ ، د) يساوي حاصل ضرب الوسطين (ب ، جـ) لتحقيق هذه القاعدة:

(أ) نحول $\frac{أ}{ب}$ إلى كسر مكافئ مقامه ب د إذن $\frac{أ}{ب} = \frac{أ د}{ب د}$

(ب) نحول $\frac{جـ}{د}$ إلى كسر مكافئ مقامه ب د إذن $\frac{جـ}{د} = \frac{ب جـ}{ب د}$

$\frac{أ د}{ب د} = \frac{ب جـ}{ب د}$ ∴ أد = ب جـ

مثال : أي الأزواج من الأعداد الآتية متكافئة

(أ) $\frac{٣}{٨}$ ، $\frac{١٥}{٤٠}$ (ب) $\frac{٤}{٧}$ ، $\frac{٢٠}{٢٥}$

الحل : أ/ ٣ × ٤٠ = ١٢٠ ، ٨ × ١٥ = ١٢٠

أي أن ٣ × ٤٠ = ٨ × ١٥ ∴ الكسور متكافئة

ب/ ٤ × ٢٥ = ١٠٠ ، ٧ × ٢٠ = ١٤٠

إذن ٤ × ٢٥ ≠ ٧ × ٢٠ ∴ الكسور غير متكافئة

مقلوب العدد النسبي:

لكل عدد نسبي $\frac{أ}{ب}$ ، أ ≠ ٠ ، ب ≠ ٠ يوجد عدد نسبي هو $\frac{ب}{أ}$ يسمّى مقلوب العدد.

مثلاً : مقلوب العدد $\frac{٣}{٤}$ هو العدد $\frac{٤}{٣}$

مقلوب $\frac{١}{٢}$ هو العدد ٢

مقلوب − ٥ = $-(\frac{١}{٥}) = \frac{١}{-٥} = \frac{-١}{٥}$

مقلوب $\frac{-أ}{ب}$ هو $\frac{-ب}{أ} = \frac{ب}{-أ} = -(\frac{ب}{أ})$

قاعدة :

حاصل ضرب أي عدد نسبي في مقلوبه = ١

تمرين : (١ − ٢)

(١) وضح صحة كل من العبارات التالية:

(أ) $\frac{٢}{٣} = \frac{-٢}{-٣}$ (ب) $\frac{-٤}{٥} = \frac{٤}{-٥}$

(٢) أي الأزواج من الأعداد الآتية متكافئة :

(أ) $\frac{١}{٥}$ ، $\frac{١٥}{٧٥}$ (ب) $-(\frac{٢}{٩})$ ، $-(\frac{٨}{٤٥})$ (جـ) $-\frac{٨}{١٣}$ ، $-\frac{٢٤}{٣٩}$

(٣) اكتب الأعداد الكسرية التالية في أبسط صورة للعدد النسبي المكافئ :

(أ) $\frac{٩}{١٥}$ (ب) $-(\frac{١٢}{٣٦})$ (جـ) $\frac{٦٣}{١٠٥}$ (د) $-\frac{١٤٤}{٢٠٤}$

(٤) جد مقلوبات الأعداد الآتية :

(أ) $\frac{٧}{١٢}$ (ب) − ٨ (جـ) $-\frac{١}{٧}$ (د) $-(\frac{٥}{٨})$

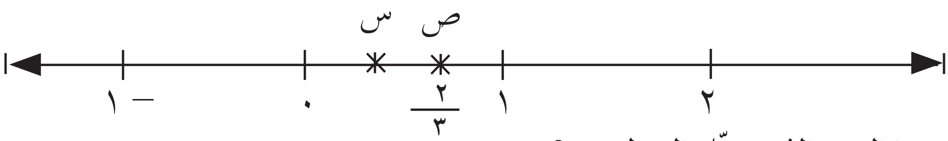
(١ - ٣) : تمثيل الأعداد النسبية على خط الأعداد :

تعلمنا سابقاً كيف نمثل الأعداد الصحيحة على خط الأعداد ، وذلك بوضع جميع الأعداد الصحيحة الموجبة على يمين الصفر، والأعداد الصحيحة السالبة على يسار الصفر، على أبعاد متساوية .

> الصفر عدد نسبي محايد غير موجب وغير سالب

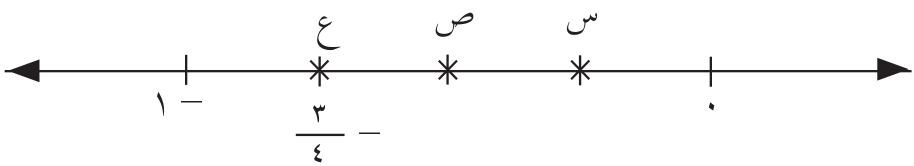
على نفس الخط يمكن تمثيل الأعداد النسبية كالآتي:

(أ) لتمثيل العدد $\frac{٢}{٣}$ على خط الأعداد نقسم القطعة المحصورة بين النقطة التي تمثّل العدد صفر والنقطة التي تمثل العدد ١ إلى ثلاثة أقسام متساوية في النقطتين س ، ص وتكون النقطة ص هي النقطة التي تمثّل العدد.



ما العدد الذي تمثّله النقطة س ؟

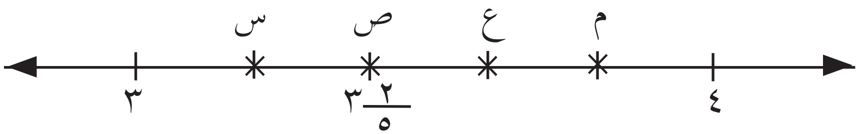
(ب) لتمثيل العدد $-\frac{٣}{٤}$ على خط الأعداد نقسم القطعة المحصورة بين النقطة التي تمثّل العدد صفر والعدد −١ إلى أربعة أقسام متساوية في النقاط س ، ص ، ع وتكون النقطة ع هي النقطة التي تمثل العدد $-(\frac{٣}{٤})$



ما الأعداد التي تمثّلها النقاط س ، ص ؟

عيّن النقطة التي تمثّل $\frac{-٣}{٤}$ والنقطة التي تمثّل $\frac{٣}{-٤}$ ماذا تلاحظ ؟

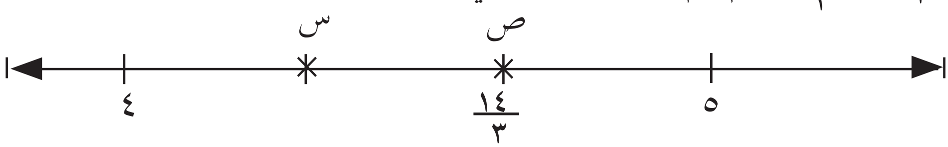
(جـ) لتمثيل العدد $٣\frac{٢}{٥}$ على خط الأعداد نقسم القطعة المحصورة بين النقطة التي تمثّل العدد ٣ والنقطة التي تمثّل العدد ٤ إلى خمسة أقسام متساوية في النقاط س ، ص ، ع ، م وتكون النقطة ص هي تمثّل العدد $٣\frac{٢}{٥}$



ما الأعداد التي تمثّلها النقاط س ، ع ، م ؟

(د) لتمثيل العدد $\frac{١٤}{٣}$ على خط الأعداد يجب أن يحوّل إلى كسر مركب (كما تعلمنا سابقاً) :

$\frac{١٤}{٣} = ٤\frac{٢}{٣}$ ثم يتم تمثيله كما سبق في المثال جـ .



وتكون النقطة ص هي التي تمثّل العدد $\frac{١٤}{٣}$

ما العدد الذي تمثّله النقطة س ؟

تدريب صفي :

على خط الأعداد مثّل الأعداد الآتية:

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $-٣\frac{٤}{٥}$ (جـ) $-\frac{٧}{٤}$

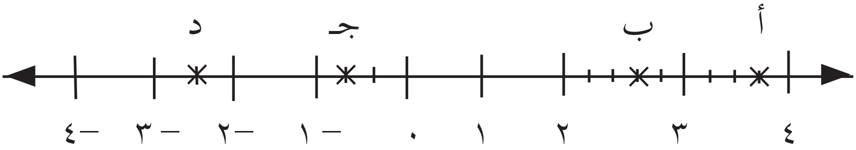
تمرين (١ – ٣)

١/ على خط الأعداد مثّل الأعداد الآتية:

(أ) $٢\frac{١}{٢}$ (ب) $٤\frac{١}{٤}$ (جـ) $-\frac{٢}{٣}$

(د) $-\frac{٣}{٤}$ (هـ) $-(\frac{١٥}{٤})$

٢/ اكتب العدد الذي تمثّله كل من النقاط أ ، ب ، جـ ، د



(١ ـ ٤) : مقارنة عددين نسبيين:

أولاً : إذا كان المقامان متساويين :

نقارن بين البسطين فأكبرهما هو العدد الأكبر، فمثلاً :

أ/ أيهما أكبر $\frac{٦}{٧}$ أم $\frac{٤}{٧}$

بما أن المقامين متساويين و $٦ > ٤$ فإن $\frac{٦}{٧} > \frac{٤}{٧}$

ب/ أيهما أكبر $-\frac{٥}{٩}$ أم $-\frac{٨}{٩}$.

بما أن المقامين متساويين و $-٥ > -٨$ فإن $-\frac{٥}{٩} > -\frac{٨}{٩}$

قاعدة:

إذا كان $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{جـ}{ب}$ عددين نسبيين حيث $ب > ٠$

(أ) $أ > جـ$ فإن $\frac{أ}{ب} > \frac{جـ}{ب}$

(ب) $أ < جـ$ فإن $\frac{أ}{ب} < \frac{جـ}{ب}$

ثانياً : إذا كان مقاما العددين مختلفين

أيهما أكبر $\frac{٣}{٨}$ أم $\frac{٢}{٧}$

نجعل المقامين متساويان كما تعلمنا في الكسور المتكافئة
المضاعف المشترك الأصغر للمقامين ٥٦

$\frac{٣}{٨} = \frac{٣ \times ٧}{٨ \times ٧} = \frac{٢١}{٥٦}$ ، $\frac{٢}{٧} = \frac{٢ \times ٨}{٧ \times ٨} = \frac{١٦}{٥٦}$

وبما أن $٢١ > ١٦$ إذن $\frac{٣}{٨} > \frac{٢}{٧}$

بصورة عامة :

لمقارنة العددين $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{جـ}{د}$ حيث ب > ٠ ، د > ٠

نكتب العددين بمقام ب د

$$\frac{أ}{ب} = \frac{أ \times د}{ب \times د} = \frac{أ د}{ب د} \quad ، \quad \frac{جـ}{د} = \frac{جـ \times ب}{د \times ب} = \frac{جـ ب}{د ب}$$

إذا كان

(أ) أ د > جـ ب فإن $\frac{أ}{ب} > \frac{جـ}{د}$

(ب) أ د < جـ ب فإن $\frac{أ}{ب} < \frac{جـ}{د}$

مثال (١) : رتب تصاعدياً الأعداد $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٢}{٥}$ ، $\frac{٣}{٤}$

الحل : المضاعف المشترك الأصغر للمقامات = ٦٠

$$\frac{٢}{٣} = \frac{٢ \times ٢٠}{٣ \times ٢٠} = \frac{٤٠}{٦٠} \quad ، \quad \frac{٢}{٥} = \frac{٢ \times ١٢}{٥ \times ١٢} = \frac{٢٤}{٦٠}$$

$$\frac{٣}{٤} = \frac{٣ \times ١٥}{٤ \times ١٥} = \frac{٤٥}{٦٠}$$ (بمقارنة البسط والترتيب)

∴ الترتيب هو $\frac{٢}{٥}$ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٣}{٤}$

مثال (٢): رتب تنازليا الأعداد : $\frac{٥}{٧}$ ، $\frac{٢}{٥}$ ، $\frac{١}{٢}$

الحل : المضاعف المشترك الأصغر للمقامات = ٧٠

$$\frac{٥}{٧} = \frac{٥ \times ١٠}{٧ \times ١٠} = \frac{٥٠}{٧٠} \quad ، \quad \frac{٢}{٥} = \frac{٢ \times ١٤}{٥ \times ١٤} = \frac{٢٨}{٧٠}$$

$$\frac{١}{٢} = \frac{١ \times ٣٥}{٢ \times ٣٥} = \frac{٣٥}{٧٠}$$ (بالمقارنة) ∴ $\frac{٥}{٧}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٢}{٥}$

تمرين : (١ - ٤)

١/ أيهما أكبر في كل زوج مما يأتي :

(أ) $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{٥}{٨}$ (ب) $-(\frac{٢}{٣})$ ، $-(\frac{٥}{٧})$

(جـ) $\frac{٦}{١١}$ ، $\frac{٥}{٩}$ (د) $-\frac{٣}{٨}$ ، $-(\frac{٢}{٥})$

٢/ رتب تصاعدياً الأعداد : $\frac{٣}{٨}$ ، $\frac{٢}{٥}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$

٣/ رتب تنازليا الأعداد: $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٦}{٧}$ ، $\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{٥}{١٢}$

(١ - ٥) : عملية الضرب في مجموعة الأعداد النسبية

تعرفت في دراستك بالصف الخامس الإبتدائي على ضرب الكسور ، وعلمت أنه عند إجراء العملية $\frac{٢}{٧} \times \frac{٦}{١١}$ يكون الناتج $\frac{٢ \times ٦}{٧ \times ١١}$ أي أنه

> إذا كان $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{جـ}{د}$ عددين نسبيين فإن $\frac{أ}{ب} \times \frac{جـ}{د} = \frac{أ \times جـ}{ب \times د} = \frac{أ\,جـ}{ب\,د}$

و يكون حاصل ضرب عددين نسبيين موجباً إذا اتحدت إشارتاهما .

و يكون حاصل ضرب عددين نسبيين سالباً إذا كانا مختلفين في الإشارة .

مثال : جد ناتج الضرب لما يأتي :

أ / $\frac{٣}{١١} \times \frac{٦}{٥}$ ب / $-٦\frac{١}{٥} \times \frac{٤}{٧}$

جـ / $-\frac{٧}{١٣} \times ٢\frac{١}{٦}$ د / $-٤\frac{١}{٥} \times ٥$

الحل :

(أ) $\frac{٣}{١١} \times \frac{٦}{٥} = \frac{٣ \times ٦}{١١ \times ٥} = \frac{١٨}{٥٥}$

(ب) $-٦\frac{١}{٥} \times \frac{٤}{٧} = -\frac{٣١}{٥} \times \frac{٤}{٧}$ (نحول العدد $٦\frac{١}{٥}$ إلى الصورة $\frac{أ}{ب}$)

$= -\frac{١٢٤}{٣٥} = -٣\frac{١٩}{٣٥}$

(جـ) $\frac{-٧}{١٣} \times \frac{-١٣}{٦} = \frac{٧}{٦}$ (بعد الاختصار) $= ١\frac{١}{٦}$

(د) $-٤\frac{١}{٥} \times ٥ = -\frac{٢١}{٥} \times ٥ = -٢١$ (بعد الاختصار)

نشاط:

حديقة منزلية طولها $٤\frac{١}{٤}$ متر وعرضها $٢\frac{٤}{٥}$ متر ، جد مساحتها .

تمرين : (١ - ٥)

أجر عمليات الضرب الآتية :

(١) $\frac{٣}{٥} \times \frac{٤}{٧}$ (٢) $\frac{١}{٩} \times -\left(\frac{٧}{١٥}\right)$

(٣) $\frac{-٣}{٥} \times \frac{٢}{٩}$ (٤) $-\left(\frac{٢٧}{٢٨}\right) \times \frac{١٩}{٢٠}$

(٥) $\frac{-٣}{٨} \times \left(-\frac{٢٠}{٢١}\right)$ (٦) $\frac{-٩}{٢١} \times \left(-\frac{١١}{٣}\right)$

(٧) $\frac{٥}{٦} \times \left(-\frac{١٥}{٤}\right)$ (٨) $-\left(٣\frac{١}{٨}\right) \times \left(-\frac{٢}{٥}\right)$

(٩) $-\left(\frac{٨}{٩}\right) \times \frac{٧}{١١}$ (١٠) $-١\frac{٢}{٧} \times \left(-\frac{٩}{٢١}\right)$

(١ - ٦) : عملية القسمة في مجموعة الأعداد النسبية:

تعلمت بالصف الخامس الإبتدائي أن قسمة كسر على كسر آخر ، هو ضرب الكسر الأول في مقلوب الكسر الثاني أي أن:

إذا كان $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{جـ}{د}$ عددين نسبيين ، جـ $\neq$ ٠ فإنّ :

$$\frac{أ}{ب} \div \frac{جـ}{د} = \frac{أ}{ب} \times \frac{د}{جـ} = \frac{أ \times د}{ب \times جـ} = \frac{أ\,د}{ب\,جـ}$$

ملاحظات :

١/ يكون ناتج قسمة عددين نسبيين موجباً إذا اتحدت إشارتاهما .

٢/ يكون ناتج قسمة عددين نسبيين سالباً إذا كانا مختلفين في الإشارة .

٣/ القسمة على الصفر غير معرّفة (أي لا يجوز القسمة على الصفر).

لأن : $\frac{٠}{٠}$ غير معرّفة

($\frac{أ}{٠}$ ، أ $\neq$ ٠ ، قيمة لا نهائية)

مثال (١) :

جد ناتج القسمة لما يأتي :

(أ) $\frac{٣}{٤} \div \frac{٢}{٥}$ (ب) $-٢\frac{١}{٤} \div \frac{٣}{-٥}$

(جـ) $\frac{٥}{٩} \div -\left(\frac{٢}{٧}\right)$ (د) $٢\frac{١}{٥} \div ٣\frac{٢}{٣} \div \frac{١}{٤}$

الحل :

(أ) $\frac{٣}{٤} \div \frac{٢}{٥} = \frac{٣}{٤} \times \frac{٥}{٢} = \frac{١٥}{٨} = ١\frac{٧}{٨}$

(ب) $-٢\frac{١}{٤} \div \frac{٣}{-٥} = -\frac{٩}{٤} \times \frac{-٥}{٣} = \frac{٤٥}{١٢} = \frac{١٥}{٤} = ٣\frac{٣}{٤}$

(جـ) $\frac{٥}{٩} \div -\left(\frac{٢}{٧}\right) = \frac{٥}{٩} \times -\frac{٧}{٢} = -\frac{٣٥}{١٨} = -١\frac{١٧}{١٨}$

(د) $\left(٢\frac{١}{٥} \div ٣\frac{٢}{٣}\right) \div \frac{١}{٤} = \left(\frac{١١}{٥} \div \frac{١١}{٣}\right) \div \frac{١}{٤}$

$$= \left(\frac{١١}{٥} \times \frac{٣}{١١}\right) \div \frac{١}{٤}$$

$$= \frac{٣}{٥} \div \frac{١}{٤} = \frac{٣}{٥} \times \frac{٤}{١} = \frac{١٢}{٥} = ٢\frac{٢}{٥}$$

مثال (٢) : جد قيمة $\frac{س}{ص}$ التي تحقق المعادلة :

$$\frac{س}{ص} \times \left(-\frac{٢}{٣}\right) = -\left(\frac{٧}{١٢}\right)$$

الحل :

$$\frac{س}{ص} = -\left(\frac{٧}{١٢}\right) \div -\left(\frac{٢}{٣}\right)$$

$$= -\left(\frac{٧}{١٢}\right) \times -\left(\frac{٣}{٢}\right) = \frac{٢١}{٢٤} = \frac{٧}{٨}$$

نشاط:

مزرعة مستطيلة الشكل مساحتها $١٣٠\frac{٢}{٣}$ متر مربع جد طولها إذا كان عرضها $١٠\frac{١}{٢}$ متر .

تمرين (١ - ٦)

(١) جد ناتج العمليات الآتية :

(أ) $-٩ \div ٣\frac{١}{٢}$ (ب) $-١٢\frac{١}{٤} \div \frac{١٤}{٣}$

(جـ) $-١١ \div \left(-\frac{٩}{١١}\right)$ (د) $\frac{٠}{٣} \div \frac{٢}{٥}$

(هـ) $\left(\frac{٥}{٤} \div \frac{١}{٢}\right) \div \frac{٢}{٣}$ (و) $\frac{٣}{٤} \div \left(\frac{١}{٢} \div \frac{٢}{٣}\right)$

(٢) جد العدد النسبي $\frac{س}{ص}$ الذي يحقق كلاً من :

(أ) $\frac{٩}{١١} \div -\frac{٣}{٧} = \frac{س}{ص}$

(ب) $\frac{٢}{٣} \times \frac{س}{ص} = \frac{٣}{٤}$

(جـ) $\frac{س}{ص} \times \frac{١٤}{٢٧} = ٠$

(٣) هل يمكن إيجاد قيمة $\frac{أ}{ب} \div \frac{٠}{جـ}$ حيث ب $\neq$ ٠ ، جـ $\neq$ ٠

(٤) زجاجة تحوى $٢\frac{١}{٤}$ لتر من العصير . جد عدد الأكواب التي يمكن تعبئتها من الزجاجة علماً بأن الكوب يحوى $\frac{٣}{٨}$ لتر من العصير .

(١ - ٧) : جمع الأعداد النسبية متساوية المقامات :

قاعدة :

لكل $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{جـ}{ب}$ $\in$ ن ، ب $\neq$ ٠ فإن $\frac{أ}{ب} + \frac{جـ}{ب} = \frac{أ + جـ}{ب}$

مثال: أجر عمليات الجمع الآتية :

أ/ $\frac{٦}{٥} + \frac{٨}{٥}$ ب/ $-\frac{٥}{٣} + \frac{-٢}{٣}$ جـ/ $\frac{-٤}{١١} + \frac{٢}{١١}$ د/ $\frac{٩}{٧} + \frac{-١٠}{٧}$

الحل:

أ/ $\frac{٦}{٥} + \frac{٨}{٥} = \frac{٦ + ٨}{٥} = \frac{١٤}{٥} = ٢\frac{٢}{٥}$

ب/ $\frac{-٥}{٣} + \frac{-٢}{٣} = \frac{-٥ - ٢}{٣} = \frac{-٧}{٣} = -\ ٢\frac{١}{٣}$

جـ/ $\frac{-٤}{١١} + \frac{٢}{١١} = \frac{-٤ + ٢}{١١} = \frac{-٢}{١١}$

د/ $\frac{٩}{٧} + \frac{-١٠}{٧} = \frac{٩ + -١٠}{٧} = \frac{-١}{٧}$

تمرين (١ - ٧)

أجر العمليات التالية:

أ/ $\frac{٣}{٧} + \frac{١٢}{٧}$ ب/ $-\frac{٦}{١٠} + \frac{٣}{١٠}$ جـ/ $-\frac{٢٤}{٢٣} + \frac{-١٦}{٢٣}$

د/ $\frac{١٥}{١٧} + \frac{-٢}{١٧}$ هـ/ $\frac{-١١}{٣} + \frac{-١٦}{٣}$ و/ $٥\frac{١}{٤} + ٣\frac{٣}{٤}$

ز/ $٢\frac{٢}{٥} + ٣\frac{-١}{٥}$ حـ/ $٦\frac{١}{٣} + ٣\frac{-٢}{٣}$

(١ - ٨) : جمع الأعداد النسبية مختلفة المقامات

أولاً نجعل المقامات في الكسرين متساويين ثم نطبق القاعدة في الدرس السابق .

مثال (١): جد حاصل جمع $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٣}{٤}$

المضاعف المشترك الأصغر للعددين ٣ ، ٤ هو ١٢

$$\frac{٢}{٣} = \frac{٢ \times ٤}{٣ \times ٤} = \frac{٨}{١٢} \quad ، \quad \frac{٣}{٤} = \frac{٣ \times ٣}{٤ \times ٣} = \frac{٩}{١٢}$$

$$\therefore \frac{٢}{٣} + \frac{٣}{٤} = \frac{٨}{١٢} + \frac{٩}{١٢} = \frac{٨ + ٩}{١٢} = \frac{١٧}{١٢} = ١\frac{٥}{١٢}$$

مثال (٢): اجر العمليات الآتية :

أ / $\frac{-٧}{٦} + \frac{-٦}{٩}$ (ب) $\frac{٦}{٥} + \frac{٤}{٣}$

الحل :

أ / المضاعف المشترك الأصغر للمقامين ١٨

$$\frac{-٧}{٦} = \frac{-٧ \times ٣}{٦ \times ٣} = \frac{-٢١}{١٨} \quad ، \quad \frac{-٦}{٩} = \frac{-٦ \times ٢}{٩ \times ٢} = \frac{-١٢}{١٨}$$

$$\frac{-٧}{٦} + \frac{-٦}{٩} = \frac{-٢١}{١٨} + \frac{-١٢}{١٨} = \frac{-٢١ - ١٢}{١٨} = \frac{-٣٣}{١٨} = \frac{-١١}{٦} = -١\frac{٥}{٦}$$

ب/ المضاعف المشترك الأصغر للمقامين ١٥

$$\frac{٦}{٥} = \frac{٦ \times ٣}{٥ \times ٣} = \frac{١٨}{١٥} \quad ، \quad \frac{٤}{٣} = \frac{٤ \times ٥}{٣ \times ٥} = \frac{٢٠}{١٥}$$

$$\frac{٦}{٥} + \frac{٤}{٣} = \frac{١٨}{١٥} + \frac{٢٠}{١٥} = \frac{٣٨}{١٥} = ٢\frac{٨}{١٥}$$

مثال : (٣)

جد ناتج $٢\frac{٣}{٧} + ٤\frac{١}{٦}$

الحل:

$$٢\frac{٣}{٧} + ٤\frac{١}{٦} = \frac{١٧}{٧} + \frac{٢٥}{٦}$$

$$= \frac{١٧ \times ٦}{٧ \times ٦} + \frac{٢٥ \times ٧}{٦ \times ٧} \quad \text{(لماذا)}$$

$$= \frac{١٠٢}{٤٢} + \frac{١٧٥}{٤٢} = \frac{١٠٢ + ١٧٥}{٤٢}$$

$$= \frac{٢٧٧}{٤٢} = ٦\frac{٢٥}{٤٢}$$

حل آخر :

من الممكن جمع الأعداد الصحيحة أولاً ثم تجمع الكسور كالآتي:

$$٢\frac{٣}{٧} + ٤\frac{١}{٦}$$

مجموع الأعداد الصحيحة $= ٢ + ٤ = ٦$

مجموع الكسرين $\frac{٣}{٧} + \frac{١}{٦} = \frac{٣ \times ٦}{٧ \times ٦} + \frac{١ \times ٧}{٦ \times ٧}$

$$= \frac{١٨}{٤٢} + \frac{٧}{٤٢} = \frac{٢٥}{٤٢}$$

المجموع $= ٦\frac{٢٥}{٤٢}$

مثال: (٤)

جد ناتج : $٥\frac{٢}{٣} + \left(٤\frac{-١}{٦}\right)$

الحل :

$$٥\frac{٢}{٣} + \left(٤\frac{-١}{٦}\right) = \frac{١٧}{٣} + \left(\frac{-٢٥}{٦}\right)$$ (المضاعف المشترك للمقامين ٦)

$$= \frac{١٧ \times ٢}{٣ \times ٢} - \frac{٢٥}{٦} = \frac{٣٤}{٦} - \frac{٢٥}{٦} = \frac{٣٤ - ٢٥}{٦}$$

$$= \frac{٩}{٦} = \frac{٣}{٢}$$

تمرين (١ – ٨)

أجر العمليات الآتية:

(أ) $\frac{-٤}{٩} + \frac{-٥}{١٢}$

(ب) $\frac{١٤}{٣٩} + \frac{٦}{١٣}$

(جـ) $-\frac{٤}{٧} + \frac{٩}{-٥}$

(د) $-\frac{٨}{٦} + \frac{٦}{-٩}$

(هـ) $\frac{٢٢}{-٣} + \frac{٨}{-٦}$

(و) $٣\frac{١}{٤} + ٢\frac{٥}{٨}$

(حـ) $-٢\frac{١}{٢} + ٤\frac{-٢}{٥}$

(ي) $٦\frac{٣}{٤} + \frac{-٢٢}{٣}$

(١ - ٩) : عملية الطرح في مجموعة الأعداد النسبية

سبق أن علمنا أن عملية طرح عدد صحيح من عدد صحيح آخر عبارة عن إضافة النظير الجمعي للعدد الثاني إلى العدد الأول ، وبالطريقة نفسها يمكننا طرح عدد نسبيٍ من عدد نسبي آخر .

أولاً : **طرح عدد نسبي من عدد نسبي آخر إذا كانت المقامات موحدة**

إذا كان $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{ج}{ب}$ $\in$ ن فإنّ :

$$\frac{أ}{ب} - \frac{ج}{ب} = \frac{أ}{ب} + \frac{-ج}{ب} = \frac{أ + -ج}{ب} = \frac{أ - ج}{ب}$$

مثال (١): جد قيمة : $\frac{٥}{٧} - \frac{-٣}{٧}$

الحل: $\frac{٥}{٧} - \frac{-٣}{٧} = \frac{٥}{٧} + \frac{٣}{٧} = \frac{٥ + ٣}{٧} = \frac{٨}{٧} = ١\frac{١}{٧}$

ثانياً : **طرح عدد نسبي من عدد نسبي آخر إذا كانت المقامات مختلفة :**

نوحد المقامات بنفس الطريقة التي استخدمت في الدرس السابق.

مثال (٢) اجر العمليات الآتية :

أ / $\frac{٤}{٥} - \frac{٢}{٣}$ ب / $٣\frac{٤}{٥} - ٢\frac{١}{٤}$

الحل :

أ / $\frac{٤}{٥} - \frac{٢}{٣} = \frac{٤}{٥} + \frac{-٢}{٣}$ المضاعف المشترك الأصغر للمقامين ١٥

$= \frac{٤ \times ٣}{٥ \times ٣} + \frac{-٢ \times ٥}{٣ \times ٥} = \frac{١٢}{١٥} + \frac{-١٠}{١٥} = \frac{١٢ - ١٠}{١٥} = \frac{٢}{١٥}$

ب / $٣\frac{٤}{٥} - ٢\frac{١}{٤} = \frac{١٩}{٥} - \frac{٩}{٤} = \frac{١٩ \times ٤}{٥ \times ٤} - \frac{٩ \times ٥}{٤ \times ٥}$

$= \frac{٧٦}{٢٠} - \frac{٤٥}{٢٠} = \frac{٧٦ - ٤٥}{٢٠} = \frac{٣١}{٢٠} = ١\frac{١١}{٢٠}$

تمرين : (١ – ٩)

أجر عمليات الطرح الآتية :

١/ $\frac{٧}{٩} - \frac{١}{٩}$ ٢/ $\frac{-١١}{١٣} - \frac{٩}{١٣}$

٣/ $٢\frac{١}{٧} - ٣\frac{-٥}{٧}$ ٤/ $\frac{٧}{٨} - \frac{٣}{٤}$

٥/ $\frac{-٦}{٥} - \frac{-١}{٤}$ ٦/ $٢\frac{-١}{٤} - (-٣)$

٧/ $٧\frac{-٢}{١٥} - ٤\frac{١}{٣٥}$ ٨/ $٦\frac{٢}{٥} - ٤\frac{١}{٤}$

(١ - ١٠) خواص جمع الأعداد النسبية:

١/ مجموعة الأعداد النسبية مغلقة تحت عملية الجمع ، أي أن:

لكل $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{جـ}{د}$ $\in$ ن فإن ($\frac{أ}{ب}$ + $\frac{جـ}{د}$) $\in$ ن

جد :

$\frac{١}{٣} + \frac{٢}{٤} =$

$\frac{-٢}{٦} + \frac{٢}{٣} =$

ماذا تلاحظ ؟

٢/ عملية الجمع على مجموعة الأعداد النسبية تبديلية أي أنه

لكل $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{جـ}{د}$ $\in$ ن فإنه $\frac{أ}{ب} + \frac{جـ}{د} = \frac{جـ}{د} + \frac{أ}{ب}$

بيّن صحة :

$\frac{٢}{٣} + \frac{٥}{٤} = \frac{٥}{٤} + \frac{٢}{٣}$

$\frac{-٣}{٨} + \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} + \frac{-٣}{٨}$

ماذا تلاحظ ؟

٣/ العنصر المحايد الجمعي هو الصفر

لكل $\frac{أ}{ب}$ $\in$ ن فإنه $\frac{أ}{ب}$ + ٠ = ٠ + $\frac{أ}{ب}$ = $\frac{أ}{ب}$

٤/ لكل عدد $\frac{أ}{ب} \in ن$ يوجد عدد $-(\frac{أ}{ب})$ (النظير الجمعي)

حيث $\frac{أ}{ب} + -(\frac{أ}{ب}) =$ صفر

وعليه $-(-(\frac{أ}{ب})) = \frac{أ}{ب}$

٥/ عملية الجمع على مجموعة الاعداد النسبية تجميعية أي انه

لكل $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{جـ}{د}$ ، $\frac{هـ}{و} \in ن$ فإن

$$\left(\frac{أ}{ب} + \frac{جـ}{د}\right) + \frac{هـ}{و} = \frac{أ}{ب} + \left(\frac{جـ}{د} + \frac{هـ}{و}\right)$$

تمرين: (١ - ١٠)

(١) اكتب النظير الجمعي للأعداد الآتية:

أ/ ٢٥ ب/ $\frac{٢}{٣}$ جـ/ $-\frac{٥}{٦}$ د/ $٢\frac{٣}{٤}$

(٢) اكتب الخاصية التي توضحها كل جملة مما يلي:

أ/ $-\frac{٣}{٥} + ٦\frac{١}{٥} = ٦\frac{١}{٥} + \frac{-٣}{٥}$

ب/ $\left(\frac{١}{٢} + \frac{-٤}{٥}\right) + ٣\frac{١}{٤} = \frac{١}{٢} + \left(-\frac{٤}{٥} + ٣\frac{١}{٤}\right)$

جـ/ $\frac{٣}{٤} + ٠ = \frac{٣}{٤}$ د/ $\frac{٣}{٥} + \frac{-٣}{٥} = ٠$

هـ/ $\left(\frac{٥}{٦} + \frac{-٣}{٤}\right) \in ن$

(٣) املأ الفراغ بالعدد المناسب:

أ / $\frac{٩}{٣} + (٤ + \boxed{}) = (\frac{٩}{٣} + \boxed{}) + \frac{٥}{٦}$

ب/ $-(-(-(\frac{-٣}{٥}))) = \boxed{}$

٤) أ / هل مجموعة الاعداد النسبية مغلقة تحت عملية الطرح ؟ أعط أمثلة تؤيد اجابتك.

ب/ هل عملية الطرح على مجموعة الاعداد النسبية تبديلية ؟ أعط أمثلة تؤيد اجابتك.

جـ / هل عملية الطرح على مجموعة الاعداد النسبية تجميعية ؟ أعط أمثلة تؤيد اجابتك.

(١ - ١١) : خواص ضرب الأعداد النسبية:

١/ مجموعة الأعداد النسبية **مغلقة بالنسبة لعملية الضرب** أي أن

لكل $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ ، $\frac{\text{جـ}}{\text{د}} \in \text{ن}$ فإن $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \times \frac{\text{جـ}}{\text{د}} \in \text{ن}$

٢/ عملية الضرب للأعداد النسبية **تبديلية** أي أنَّ

إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ ، $\frac{\text{جـ}}{\text{د}} \in \text{ن}$ فإن $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \times \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} \times \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$

٣/ ضرب الأعداد النسبية **تجميعي** أي أن

لكل $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ ، $\frac{\text{جـ}}{\text{د}}$ ، $\frac{\text{هـ}}{\text{و}} \in \text{ن}$

فإن $\left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \times \frac{\text{جـ}}{\text{د}}\right) \times \frac{\text{هـ}}{\text{و}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}} \times \left(\frac{\text{جـ}}{\text{د}} \times \frac{\text{هـ}}{\text{و}}\right)$

٤/ **العنصر المحايد الضربي** هو ١ أي أن

لكل $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \in \text{ن}$ فإن $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \times ١ = ١ \times \frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$

٥/ **النظير الضربي** :

تعلم أن $\frac{٣}{٥} \times \frac{٥}{٣} = ١$ (العنصر المحايد الضربي)

$\frac{-٢}{٧} \times \frac{-٧}{٢} = ١$ (العنصر المحايد الضربي)

لكل $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ يوجد $\frac{\text{ب}}{\text{أ}}$ (أ $\neq$ ٠) تحقق العلاقة $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \times \frac{\text{ب}}{\text{أ}} = ١$

يسمى $\frac{\text{ب}}{\text{أ}}$ **النظير الضربي** للعدد (المقلوب) $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$

٦/ خاصية التوزيع :

جد ناتج : $\frac{٢}{٣} \times (\frac{١}{٤} + \frac{٢}{٥})$ ، $\frac{٢}{٣} \times \frac{١}{٤} + \frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٥}$

قارن بين الناتجين

لكل $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{جـ}{د}$ ، $\frac{هـ}{و}$ $\in$ ن فإن

$$\frac{أ}{ب} \left(\frac{جـ}{د} + \frac{هـ}{و} \right) = \frac{أ}{ب} \times \frac{جـ}{د} + \frac{أ}{ب} \times \frac{هـ}{و}$$

مثال: استخدم خاصية توزيع الضرب على الجمع لإيجاد:

أ/ $\frac{٢}{٩} \left(\frac{١٥}{٤} + \frac{١٨}{١٠} \right) = \frac{٢}{٩} \times \frac{١٥}{٤} + \frac{٢}{٩} \times \frac{١٨}{١٠}$

$= \frac{١}{٣} \times \frac{٥}{٢} + ١ \times \frac{٢}{٥}$

$= \frac{٥}{٦} + \frac{٢}{٥} = \frac{٥ \times ٥}{٦ \times ٥} + \frac{٢ \times ٦}{٥ \times ٦}$

$= \frac{٢٥}{٣٠} + \frac{١٢}{٣٠} = \frac{٣٧}{٣٠}$

ب/ $٦ \times ٤\frac{١}{٣} = ٦ \left(\frac{١}{٣} + ٤ \right)$

$= ٦ \times \frac{١}{٣} + ٦ \times ٤$

$= ٢ + ٢٤ = ٢٦$

تمرين (١ - ١١)

(١) اذكر الخاصية المتضمنة في كل من العمليات الآتية:

أ/ $-\left(\frac{٢}{٩}\right) \times \left(-\frac{٩}{٢}\right) = ١$

ب/ $\left(\frac{٣}{٤} \times \frac{٥}{٩}\right) \times ٢\frac{١}{٢} = \frac{٣}{٤} \times \left(\frac{٥}{٩} \times ٢\frac{١}{٢}\right)$

جـ/ $\frac{٢}{٥}\left(-\frac{٢}{٧} + ٦\right) = \frac{٢}{٥} \times \frac{-٢}{٧} + \frac{٢}{٥} \times ٦$

٢) املأ الفراغ بالعدد المناسب.

أ/ $\frac{٤}{٥}\left(٧ + ٢\right) = \square \times ٧ + \square \times ٢$

ب/ $-٦\left(-\frac{١}{٤} + \frac{٣}{١١}\right) = -٦ \times \square + -٦ \times \square$

(٣) جد قيم ما يأتي باستعمال خاصية توزيع الضرب على الجمع.

أ/ $\frac{١}{٣}\left(\frac{٤}{٥} + \frac{-٢}{٣}\right)$

ب/ $-\frac{١}{٤} \times \left(\frac{١}{٣} + ٦\right)$

(١ - ١٢) : مسائل متنوعة:

مثال (١) :

اجر العمليات الآتية:

أ/ $6 - \frac{3}{5} \times \frac{10}{3}$

ب/ $\left(6 - \frac{3}{5}\right) \times \frac{10}{3}$

جـ/ $\frac{3}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{6}{5} - \frac{3}{20}$

د/ $\frac{3}{4} + \frac{2}{3}\left(\frac{6}{5} - \frac{3}{20}\right)$

الحل:

أ/ $6 - \frac{3}{5} \times \frac{10}{3} = 6 - 2 = 4$ (الضرب)

ب/ $\left(6 - \frac{3}{5}\right) \times \frac{10}{3}$ (أبدأ بإجراء عملية القوس)

$\left(\frac{30}{5} - \frac{3}{5}\right) \times \frac{10}{3} = \frac{30 - 3}{5} \times \frac{10}{3} = \frac{27}{5} \times \frac{10}{3}$

$= 9 \times 2 = 18$

جـ/ $\frac{3}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{6}{5} - \frac{3}{20}$ (اجرِ عملية الضرب أولاً)

$\frac{3}{4} + \frac{12}{15} - \frac{3}{20} = \frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \frac{3}{20}$

$= \frac{3 \times 5}{4 \times 5} + \frac{4 \times 4}{5 \times 4} - \frac{3}{20}$

$= \frac{15}{20} + \frac{16}{20} - \frac{3}{20} = \frac{15 + 16 - 3}{20} = \frac{28}{20} = \frac{7}{5}$

د/ $\frac{3}{4} + \frac{2}{3}\left(\frac{6}{5} - \frac{3}{20}\right) = \frac{3}{4} + \frac{2}{3}\left(\frac{24}{20} - \frac{3}{20}\right)$

$= \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{21}{20}$

$= \frac{3}{4} + \frac{7}{10} = \frac{15}{20} + \frac{14}{20} = \frac{29}{20}$

مثال (٢) :

جد قيمة :

$$\frac{٣\frac{١}{٢}}{١\frac{١}{٢} + ٢\frac{١}{٤}}$$

الحل:

$$\frac{٣\frac{١}{٢}}{١\frac{١}{٢} + ٢\frac{١}{٤}} = \frac{\frac{٧}{٢}}{\frac{٣}{٢} + \frac{٩}{٤}} = \frac{\frac{٧}{٢}}{\frac{٦}{٤} + \frac{٩}{٤}} = \frac{\frac{٧}{٢}}{\frac{١٥}{٤}}$$

$$= \frac{٧}{٢} \times \frac{٤}{١٥} = \frac{١٤}{١٥}$$

حل آخر

$$\frac{٣\frac{١}{٢}}{١\frac{١}{٢} + ٢\frac{١}{٤}} = \frac{\frac{٧}{٢} \times ٤}{(\frac{٣}{٢} + \frac{٩}{٤}) \times ٤} = \frac{\frac{٧}{٢} \times ٤}{\frac{٣}{٢} \times ٤ + \frac{٩}{٤} \times ٤}$$

$$= \frac{١٤}{٦ + ٩} = \frac{١٤}{١٥}$$

تمرين عام

(١) اكتب كلاً من الأعداد الآتية على الصورة $\frac{أ}{ب}$ ، ب $\neq$ ٠

أ/ ١,٧ ب/ ٢ جـ/ ٠,٦٥ د/ ٤,٠٦

(٢) اكتب مقلوبات الأعداد الآتية:

أ/ $\frac{٥}{٩}$ ب/ $-\left(\frac{٧}{١٣}\right)$ جـ/ $١٢\frac{١}{٥}$

(٣) ضع علامة > أو < لتصبح العبارة صحيحة:

أ/ $\frac{٥}{١١}$ ..... $\frac{٥}{١٢}$ ب/ $-\frac{٢}{٣}$ ..... $\frac{١}{٤}$ جـ/ $١٠\frac{٣}{٤}$ .... $-٨\frac{١}{٣}$

(٤) رتب الأعداد النسبية الآتية ترتيباً تنازلياً

-٣ ، $٢\frac{١}{٢}$ ، $١\frac{٣}{١٦}$ ، ١,٢٥

(٥) جد ناتج ما يلي:

أ/ $\left(١\frac{٥}{٦} + ٢\frac{١}{٣}\right) \div ١\frac{١}{٤}$

ب/ $١\frac{٧}{٨} \times \frac{٤}{٥} + ٣\frac{١}{٢} \times ١\frac{٥}{٧} - ٧\frac{١}{٢}$

جـ/ $١\frac{٣}{٤} + ٢\frac{١}{٥} \times \frac{٥}{١١} - ٣ \div ١\frac{١}{٤}$

د/ $١\frac{٤}{٥} + ٢\frac{٣}{٤} \times ١\frac{١}{٣}$

هـ/ $\dfrac{٢\frac{١}{٢} \times \frac{٧}{٨}}{٦ - \frac{٣}{٤}}$ و/ $\dfrac{\left(١\frac{١}{٢}\right)^{٢}}{٢\frac{١}{٥} - ١\frac{١}{٤}}$

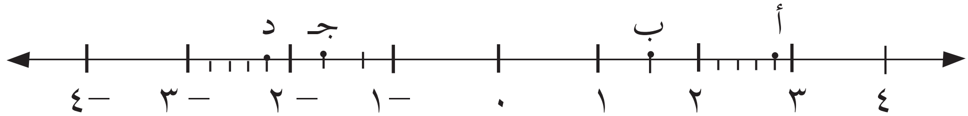
(٦) ضع العدد النسبي المناسب :

أ / ($\frac{١}{٤}$ + $\frac{١}{٥}$) × .... = ١

ب/ (٤ $\frac{١}{٢}$ − ٦ $\frac{١}{٤}$) × .... = ١

(٧) اذكر الخاصية في كل مما يأتي:
أ / ٥ (س + ٢ ص) = ٥ س + ١٠ ص
ب/ (٧ × ع) × ٤ هـ = ٧ × (ع × ٤ هـ)

(٨) على خط الأعداد وضح العدد النسبي الذي تمثله النقاط أ ، ب ، جـ ، د



(٩) ارسم الخط العددي في كراستك ثم وضّح النقاط التي تمثل الأعداد النسبية الآتية:

أ/ $\frac{٣}{٤}$ ب/ − (٣ $\frac{٢}{٣}$) جـ/ ٢ $\frac{٢}{٥}$

(١٠) عدد ساعات العمل اليومي لموظف ٨ $\frac{١}{٢}$ ساعة فإذا كان يقضي ٣ $\frac{١}{٤}$ ساعة في العمل الميداني مع الجمهور وباقي الزمن يعمل على مكتبه ؟
أ / ما نسبة ما يقضيه من عمله اليومي مع الجمهور ؟.
ب/ ما نسبة ما يقضيه من عمله اليومي على مكتبه ؟.

(١١)يصرف رجل $\frac{٢}{٥}$ من مصروفه الأسبوعي على الأكل ، $\frac{٢}{٧}$ على المواصلات

فإذا كان ما يصرفه على الأكل ٢٠٠٠٠ جنيه جد:
أ / ما يصرفه على المواصلات ؟
ب/ كم مصروفه الأسبوعي ؟

الوحدة الثانية

الجمل الرياضية والمعادلات

٥ س + ٢ = ٦ ، س ∈ ط

ص - ٣ = ٥ ، ص ∈ ص

(٢ - ١) الجمل الرياضية :

من خلال دراستك السابقة قد تدربت كثيراً على جمل رياضية تتطلب تحديد ووضع مقدار مناسب لحل مسألة مثل :

$\square + ٣ = ٨$ ‏ ‏ ‏ ‏ $١٥ - \square = ١٢$

$٦ \times \square = ١٨$ ‏ ‏ ‏ ‏ $٢ + \square < ٩$

وكنت تبحث دائماً عن عدد تضعه داخل $\square$ لتحصل على عبارة صحيحة .

فمثلاً الجملة الأولى تعني : (عدد) + ٣ = ٨

و الجواب هو ٥ حيث ٥ + ٣ = ٨

و الجملة الثانية تعني : ١٥ – (عدد) = ١٢

و الجواب هو ٣ حيث ١٥ – ٣ = ١٢ و هكذا .

كل من الجمل الرياضية أعلاه وأمثالها تسمّى جملاً مفتوحة وعادةً نرمز للعدد المجهول بأحدى الرموز مثل س ، ص ، ع ، ل ،... الخ و يسمّى المتغير .

إذن تأخذ الجمل المفتوحة السابقة الصور :

س +٣ =٨ ‏ ‏ ‏ ‏ ١٥ – ص = ١٢

٦ × ع = ١٨ ‏ ‏ ‏ ‏ ٢ + ل < ٩

خذ مثلاً الجملة المفتوحة س +٣ = ٨

لقد أشرنا إلى أنّ العدد الذي يجعل من هذه الجملة عبارة صحيحة هو ٥ فلو أنّ المتغير س أخذ القيمة ٥ لكان ٥ + ٣ = ٨ عبارة صحيحة .

و لكن عدداً آخر مثل ٧ لا يجعل هذه العبارة صحيحة و ذلك لأن إعطاء س القيمة ٧ يجعلنا نحصل على ٧ + ٣ = ٨ و هذه عبارة غير صحيحة .

لذلك نسمّي العدد ٥ حلاً للجملة المفتوحة س + ٣ = ٨

> العدد الذي يجعل من الجملة المفتوحة عبارة صحيحة يسمى حل الجملة المفتوحة .

تمرين (٢ - ١)

في كل جملة من الجمل المفتوحة الآتية إذا أخذ المتغير القيمة المفروضة ، بيّن ما إذا كانت الجمل الناتجة صواباً أم خطأ:

١) س + ٦ = ٨ ، س = ٢

٢) ص − ٤ = ٩ ، س = ١٢

٣) س + ٢ = ٠ ، س = −٢

٤) ٥ × ص = ١ ، ص = ١٥

٥) $\frac{\text{س}}{٣}$ = ٤ ، س = ١٨

٦) س + ١ > ٧ ، س = ٦

٧) ٢ × ص < ١٠ ، س = ٤

٨) س عدد زوجي ، س = ١٠

٩) س يقبل القسمة على ٤ ، س = ١٦٢

١٠) $\frac{(\text{٣ ص} + ١)}{٧}$ = ١ ، ص = ٢

(٢-٢) مجموعة التعويض ومجموعة الحل :

مثال (١): جد قيمة المجهول ص إذا كان :

ص + ٤ = ٩ حيث ص ∈ { ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ }

الحل: ص + ٤ = ٩ بالتعويض

عند ص = ٤ ٤ + ٤ = ٩ وهي جملة غير صحيحة

عند ص = ٥ ٥ + ٤ = ٩ وهي جملة صحيحة

عند ص = ٦ ٦ + ٤ = ٩ وهي جملة غير صحيحة

عند ص = ٧ ٧ + ٤ = ٩ وهي جملة غير صحيحة

∴ ص = ٥ هي القيمة الوحيدة التي تجعل الجملة المفتوحة ص + ٤ = ٩ جملة صحيحة

وتسمّى المجموعة { ٥ } مجموعة الحل ، و تسمّى المجموعة { ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ } مجموعة التعويض .

لاحظ أن مجموعة الحل هي مجموعة جزئية من مجموعة التعويض .

تعريف:

> مجموعة الحل هي المجموعة التي تحقق عناصرها الجملة المفتوحة لتصبح صواباً .

مثال (٢): جد مجموعة الحل للجملة المفتوحة

س − ٦ > ١٢ ، إذا كان مجموعة التعويض { ١١ ، ١٣ ، ١٥ ، ١٩ ، ٢١ }

الحل : س − ٦ > ١٢ بالتعويض

عند س = ١١ ١١ − ٦ > ١٢ وهي جملة غير صحيحة

عند س = ١٣ ١٣ − ٦ > ١٢ وهي جملة غير صحيحة

عند س = ١٥ ١٥ − ٦ > ١٢ وهي جملة غير صحيحة

عند س = ١٩ ١٩ − ٦ > ١٢ وهي جملة صحيحة

عند س = ٢١ ٢١ − ٦ > ١٢ وهي جملة صحيحة

∴ مجموعة الحل هي { ١٩ ، ٢١ }

مثال (٣) : عيّن مجموعة الحل للجملة المفتوحة التالية من مجموعة التعويض المرفقة :

٣ ل = ١٥ ، { ٠ ، ٣ ، ٤ ، ٥ }

الحل : ٣ ل = ١٥

بالتعويض :

عند ل = ٠ ٣× ٠ = ١٥ وهي جملة غير صحيحة

عند ل = ٣ ٣× ٣ = ١٥ وهي جملة غير صحيحة

عند ل = ٤ ٣× ٤ = ١٥ وهي جملة غير صحيحة

عند ل = ٥ ٣× ٥ = ١٥ وهي جملة صحيحة

∴ مجموعة الحل هي { ٥ }

تمرين (٢ – ٢)

عيّن مجموعة الحل في كل من المعادلات الآتية من مجموعة التعويض المرافقة :

١) س + ٢ = ٨ ، { ٦ ، ٧ }

٢) س – ٣ = ١ ، { ٤ ، ٥ ، ٦ }

٣) ٩ س = ٣٦ ، { ٣ ، ٤ ، ٥ }

٤) $\frac{\text{٣ س + ٢}}{\text{٤}}$ = ٢ ، { ١ ، ٢ ، ٤ }

٥) س + ٢ > ٥ ، { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }

٦) ص – ١ < ٦ ، { ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ }

(٢-٣) المعادلات :

نلاحظ أنّ بعض الجمل المفتوحة التي تعرّضنا لها سابقاً تتضمن علاقة التساوي (=) مثل ٣س + ٢ = ٥ في حين يتضمن بعضها الآخر علاقات أخرى مثل : أصغر من (<) أو أكبر من (>) مثل س + ٥ > ١١ ، ص − ٤ < ٣ .
أن الجملة المفتوحة التي تتضمن علاقة التساوي مثل ٣س + ٢ = ٥ تسمّى معادلة

تعريف :

المعادلة هي جملة مفتوحة تتضمن علاقة التساوي

فكل مما يأتي معادلة :

س + ٧ = ١١

٢ ص − ١ = ١

٣ س = ٢٧

$$\frac{٧}{ص} + ٤ = ٥$$

في كل معادلة من هذه المعادلات نلاحظ أنّ:

١) هناك قيماً للمتغير تجعل من هذه الجملة صحيحة أو غير صحيحة ، وفي هذه الحالة يسمى المتغير مجهولاً .

٢) كل معادلة تحتوي على مجهول واحد ، لذلك تسمى المعادلة في هذه الحالة معادلة بمجهول واحد.

لاحظنا في أمثلة الدرس السابق لإيجاد مجموعة الحل نقوم بتعويض عناصر مجموعة التعويض ونأخذ القيمة أو القيم التي تجعل العبارة صحيحة مجموعة الحل.

وكما ترى فإن طريقة التعويض طويلة . ولكن بمراجعة خواص علاقة التساوي يمكن التوصل إلى أسلوب أبسط لإيجاد مجموعة الحل.

خواص علاقة التساوي :

١/ نعلم أنّ :

١+٢ = ٣ ، ٣ = ١+٢

٢×٤ = ٨ ، ٨ = ٢×٤

أي أنّ : إذا كان أ = ب فإن ب = أ

٢/ إذا كان س = ٢ + ٦ و ٢ + ٦ = ٨

∴ س = ٨

أي أنّ : إذا كان أ = ب ، ب = جـ فإن أ = جـ

٣/ من الواضح أنّ ٤ = ٤ و ٤ + ١ = ٤ + ١ و ٤ − ١ = ٤ − ١

أي أنّ : إذا كان أ = ب فإنّ أ + جـ = ب + جـ

أ − جـ = ب − جـ

٤/ بما أن ٥ = ٥ فإن ٥ × ٤ = ٥ × ٤ و ٥ × −٤ = ٥ × −٤

أي أنّ : إذا كان أ = ب فإن أ × جـ = ب × جـ

أ × −جـ = ب × −جـ

٥/ بما أن ٦ = ٦ فإن $\frac{\text{٦}}{\text{٢}} = \frac{\text{٦}}{\text{٢}}$ و $\frac{\text{٦}}{\text{−٢}} = \frac{\text{٦}}{\text{−٢}}$

أي أنّ : إذا كان أ = ب فإن :

$\frac{\text{أ}}{\text{جـ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}}$ ، (جـ ≠ ٠)

$\frac{\text{أ}}{\text{−جـ}} = \frac{\text{ب}}{\text{−جـ}}$ ، (جـ ≠ ٠)

مثال (١) : جد مجموعة الحل للمعادلة س+٢ = ٥   س $\in$ ط

الحل : س +٢ =٥

بإضافة –٢ لكل من الطرفين نحصل على :

س+٢+(–٢) =٥+(– ٢)   النظير الجمعي

س + (٢+(–٢)) = ٣   الخاصية التجميعية

س+٠ = ٣   العنصر المحايد للجمع

$\therefore$ مجموعة الحل = { ٣ }

وللتحقق من صحة الحل:

٣ + ٢ = ٥ عبارة صحيحة .

مثال (٢) : جد مجموعة الحل للمعادلة ٢س – ٣ = –١١   س $\in$ ص

الحل: بإضافة ٣ لكل من الطرفين

٢ س –٣+٣ = –١١ +٣

٢س + (–٣+ ٣) = – ٨   لماذا ؟

٢ س = – ٨   لماذا ؟

نقسم كل من الطرفين على ٢

$$\frac{٢}{٢}\text{س} = \frac{-٨}{٢}$$

١× س = –٤   لماذا ؟

$\therefore$ س = –٤

مجموعة الحل = { – ٤ }

وللتحقق من صحة الحل

٢ ×(–٤) –٣ = –١١

مثال (٣): جد مجموعة حل المعادلة : ٥ س + ٢ = ٦   س $\in$ ط

الحل : ٥ س +٢ = ٦

بطرح ٢ من الطرفين ٥ س + ٢ – ٢ = ٦ –٢

٥ س = ٤

بقسمة الطرفين على ٥ $\therefore \frac{٥\text{س}}{٥} = \frac{٤}{٥}$ ، $\therefore$ س $= \frac{٤}{٥}$

ولكن $\frac{٤}{٥} \notin$ ط $\therefore$ مجموعة الحل = $\emptyset$

تمرين (٢ – ٣)

جد مجموعة حل المعادلات الآتية

١) س + ١ = ٤ ، س ∈ ط

٢) س – ٣ = ٥ ، س ∈ ص

٣) ٣ ص – ٢ = ٧ ، ص ∈ ط

٤) ٧ س + ١٧ = ٣ ، س ∈ ط

٥) م + ١٥ = ٢٥ ، م ∈ ط

٦) ٨ ن = ٤٠ ، ن ∈ ص

٧) $\frac{١}{٤}$ ل = ٥ ، ل ∈ ط

٨) ٤ س + ١ = ٣ ، س ∈ ط

(٢ – ٤) المعادلات التي يظهر فيها المتغير في كل من الطرفين :

إنّ معادلة مثل ٣ س = ٢ س + ٥ تختلف من المعادلات السابقة ، حيث أنّ المتغير يظهر في كل من طرفي المعادلة بالطريقة نفسها ، فإنّ التحويل عن طريق الجمع والطرح يسمحان لك بالجمع والطرح لأي حد يشمل على المتغير من كل من الطرفين دون تغيير مجموعة الحل .

مثال (١) : جد مجموعة حل المعادلة :

٢ س = س + ٥ ، س ∋ ط

الحل: ٢ س = س + ٥

٢ س – س = س +٥ – س

س = ٥

∴ مجموعة الحل = { ٥ }

للتحقق من صحة الحل :

الطرف الأيمن = ٢ ×٥ = ١٠

الطرف الأيسر = ٥ + ٥ = ١٠

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

مثال (٢) : حل المعادلة ٥ س – ٢ = ٣ س + ٤ وتحقق من صحة الحل

الحل : ٥ س – ٢ = ٣ س + ٤

٥ س – ٢ –٣ س = ٣س + ٤ – ٣ س

٢ س – ٢ = ٤

٢ س – ٢ + ٢ = ٤ +٢

٢ س = ٦

$\frac{\text{٢س}}{\text{٢}} = \frac{\text{٦}}{\text{٢}}$ ∴ س = ٣

للتحقق :

الطرف الأيمن : ٥ × ٣ – ٢ = ١٥ –٢ = ١٣

الطرف الأيسر: ٣ × ٣ + ٤ = ٩ + ٤ = ١٣

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

مثال (٣): جد مجموعة حل المعادلة $\frac{س}{٣} = \frac{س + ١}{٤}$ ، س ∋ ص

الحل : $\frac{س}{٣} = \frac{س + ١}{٤}$

بضرب الطرفين في ١٢ (المضاعف المشترك الأصغر لـ ٣ ، ٤) للتخلص من العددين ٣ ، ٤ الموجودين في مقامي الطرفين

$$١٢ \times \frac{س}{٣} = ١٢ \times \frac{س + ١}{٤}$$

$$٤ س = ٣ (س + ١)$$

$$٤ س = ٣ س + ٣$$

$$٤ س - ٣ س = ٣ \qquad \therefore س = ٣$$

$\therefore$ مجموعة الحل = { ٣ }

تمرين (٢- ٤)

جد مجموعة حل المعادلات الآتية

١. ٣ س = س +١٢ ، س ∋ ط

٢. ٧ س = ٣٦ - ٢ س ، س ∋ ص

٣. ٦ س - ١٨ = ٣س ، س ∋ ط

٤. ٤ س + ١٦ = س + ١ ، س ∋ ص

٥. ٤ س - ٧ - ٢ س = ١٥ - ٩س ، س ∋ ط

٦. ٥ (٣ س - ٢) = ٤ (٣ س + ٨) - ٣ ، س ∋ ط

٧. $\frac{ص + ١}{٧} = ٢$ ، ص ∋ ص

٨. $\frac{س}{٢} = \frac{٥ - س}{٢}$ ، س ∋ ص

٩. ٣ (س - ٣) = $\frac{س - ٤}{٤}$ ١ ، س ∋ ص

(٢ – ٥) تطبيقات على حل المسائل اللفظية :

المسائل اللفظية :

لما كان أحد أهداف دراسة علم الجبر هو مساعدتنا على حل بعض المشكلات أو المسائل الرياضية فإننا نستعمل الجبر في حل كثير من المسائل الرياضية التي يصعب حلها بالطرق الحسابية البسيطة . فتتضمّن هذه المسائل اللفظية بعض المقادير المجهولة التي يراد إيجاد قيمتها على حسب المعطيات في المسألة المعينة ولذلك نحاول تكوين معادلات وحلها .

التعبير عن المسائل اللفظية :

مثال (١): عددان أحداهما ضعف الآخر ، عبّر عن ذلك جبرياً

الحل : نفرض أن أحد العددين هو : س

∴ العدد الآخر هو ٢ س

مثال (٢) : عُمْر أبكر يزيد على عُمْر كلثوم بمقدار ٨ سنوات عبّر عن عُمْر كل منهما جبرياً .

الحل : نفرّض أنّ عُمْر أبكر = س

∴ عُمْر كلثوم = س – ٨

مثال (٣) : عددان طبيعيان متتاليان ، عبّر عنهما جبرياً

الحل : نفرض أنّ العدد الأصغر = ص

∴ العدد الأكبر = ص + ١

مثال (٤): مستطيل طوله يزيد عن ثلاثة أمثال عرضه بمقدار ٥ عبّر جبرياً عن بعديه .

الحل : نفرض أن عرض المستطيل = س

ثلاثة أمثال عرضه = ٣ س

∴ طول المستطيل = ٣ س + ٥

مثال (٥) : كسر بسطه يقل عن مقامه بمقدار ٢ عبّر عن هذا الكسر جبريّاً.

الحل : نفرض أنّ مقام الكسر = س

بسط الكسر = س – ٢

$$\therefore \text{الكسر} = \frac{\text{س} - ٢}{\text{س}}$$

تمرين (٢ – ٥)

عبّر جبرياً عن المسائل اللفظية التالية :

١. عددان فرديان متتاليان .

٢. عُمر يعقوب يزيد على ضعف عُمر سجود بمقدار ٩ سنوات .

٣. مستطيل عرضه ينقص بمقدار ٧ سم عن طوله.

٤. ثلاثة أعداد صحيحة متتالية .

٥. كسر يقل مقامه عن بسطه بمقدار ٣.

٦. العدد ٩ مضاف إليه خمسة أمثال عدد ما .

(٢-٦) حل المسائل اللفظية :

لحل المسائل اللفظية نتبع الخطوات التالية :

١. عبّر عن الشيء المطلوب إيجاده في المسائل اللفظية بصورة رمزية ، أي نفترض أن هذا الشيء س أو ص أو ع ....الخ .

٢. كوّن من المسألة معادلة رياضية .

٣. حل المعادلة لإيجاد القيمة العددية للرمز الذي فرضته .

مثال (١) : إذا أضيف العدد ٥ إلى ٧ أمثال عدد ما ، كان الناتج ٢٦ فما العدد ؟

الحل : نفرض أنّ العدد = س

∴ ٧ أمثاله = ٧ س

المعادلة هي : ٥ + ٧ س = ٢٦

٥ + ٧ س – ٥ = ٢٦ – ٥

٧ س = ٢١

س = $\frac{٢١}{٧}$

∴ س = ٣

للتحقق ٥ + ٧ × ٣ = ٥ + ٢١ = ٢٦

∴ العدد المطلوب هو ٣

مثال (٢) : عددان صحيحان متتاليان مجموعهما ١٧ ، ما العددان ؟

الحل : نفرض أن العدد الأول = س

∴ العدد الثاني = س + ١

∴ س + (س + ١) = ١٧

٢س + ١ = ١٧

٢ س = ١٦

∴ س = ٨

∴ العدد الأول = س = ٨ ، العدد الثاني = س + ١ = ٨ + ١ = ٩

مثال (٣): عدد يزيد على نظيره الجمعي بمقدار ١٤ جد هذا العدد .

الحل : نفرّض أنّ العدد = س

∴ النظير الجمعي = − س

∴ س = − س + ١٤

∴ س + س = ١٤

∴ ٢ س = ١٤

∴ س = ٧ ∴ العدد هو ٧

نلاحظ أنّ أضافة النظير الجمعي إلى الطرفين يعني إختفاء العدد من أحد الطرفين وظهوره بالطرف الآخر بتغيير إشارته ، لذلك يطلق على هذه العملية تحويل الحد إلى الطرف الآخر مع تغيير اشارته .

مثال (٤) : محيط غرفة مستطيلة الشكل ٢٨ متراً فإذا كان طولها يزيد عن عرضها ٤ أمتار فما هو عرض الغرفة وطولها ؟ .

الحل : أفرض أن عرض الغرفة = س متراً

طول الغرفة = (س + ٤) متراً

المحيط = الطولين + العرضين

محيط الغرفة = ٢ (س + ٤) + ٢ س = ٢ س + ٨ + ٢ س = ٤ س + ٨

و بما أنّ محيط الغرفة = ٢٨ متراً ∴ ٤ س + ٨ = ٢٨

∴ ٤ س = ٢٠ ، ∴ س = ٥

∴ طول الغرفة = س + ٤ = ٥ + ٤ = ٩ أمتار

وعرض الغرفة = س = ٥ أمتار

وللتحقيق: ٤ × ٥ + ٨ = ٢٠ +٨ = ٢٨ متراً

مثال (٥) : عند ضحى ضعف ما عند نبيل من الجنيهات ، وعند أحمد ٨ جنيهات أكثر مما عند ضحى . فإذا كان مجموع ما عندهم من الجنيهات ٤٨ جنيهاً كم جنيهاً عند كل واحد منهم ؟

الحل : ما عند نبيل = س جنيهاً

ما عند ضحى = ٢ س جنيهاً

ما عند أحمد = (٢ س + ٨) جنيهاً

∴ مجموع ما عندهم = (س + ٢س + ٢س + ٨) جنيهاً

= ٥س + ٨ جنيهاً

ولكن ما عندهم ٤٨ جنيهاً

∴ المعادلة هي : ٥ س + ٨ = ٤٨

٥ س = ٤٠ ، ∴ س = ٨

ما عند نبيل = س جنيهاً = ٨ جنيهات

ما عند ضحى = ٢ س = ٢ × ٨ = ١٦ جنيهاً

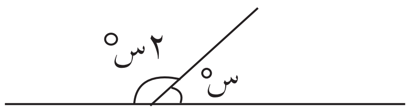
ما عند أحمد = ٢ س + ٨ = ٢ × ٨ + ٨ = ٢٤ جنيهاً

للتحقيق : ٨ + ١٦ + ٢٤ = ٤٨ جنيهاً

تمرين (٣- ٦)

١. إذا أضيف العدد ١٥ إلى ضعف عدد ما ، كان الناتج ٢٧ جد العدد .

٢. عبّر بالمعادلات عن الشكل التالي ثم جد قيمة س :



٣. جد العدد الذي إذا طُرح ١٠ من خمسة أمثاله كان الناتج ١٥.

٤. جد الأعداد الطبيعية الثلاثة المتتالية التي مجموعها ٢٤.

٥. عند عثمان ٤ أمثال ما عند أبرار ، فإذا كان مجموع ما عندهم ١٠٥ جنيه فكم جنيهاّ عند كل منهم ؟

٦. يزيد عُمر يوسف ٧ سنوات عن عُمر حسن فإذا كان مجموع عُمريهما ٢٩ سنة فما عُمر كل منهم .

٧. عدد مكون من رقمين ، رقم آحاده ضعف رقم عشراته ومجموع رقمية يساوي ٦ ، جد هذا العدد .

٨. أربعة أمثال عدد مضاف إليه ٧ يساوي النظير الجمعي لهذا العدد مضافاً إليه ٣٢ فما هو العدد ؟

تمرين عام

١/ جد مجموعة حل المعادلات التالية (مجموعة التعويض صح):

(أ) ٢ س − ٣ = ٥

(ب) ٢ س + ٧ = ٢٤

(جـ) $\frac{٢}{٣}$ س − ١ = ٧

(د) ١٧ س − ٦ = ١٢ س + ٩

(هـ) $\frac{س}{٢}$ + $\frac{س}{٣}$ = ٥

٢/ جد مجموعة الحل للمعادلات التالية (مجموعة التعويض ن)

(أ) $\frac{س + ١}{٣}$ + $\frac{٢ س − ١}{٣}$ = ٢

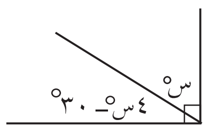
(ب) $\frac{٢ (٢ س − ٥)}{٤}$ + $\frac{س}{٤}$ = ٢

(جـ) $\frac{٢ س + ١}{٣}$ + ٣س = $\frac{٣}{٥}$ ٣

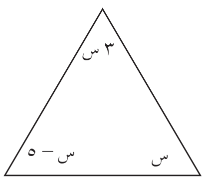
(د) $\frac{٢}{٥ (٢ س + ١)}$ = ٣

٣/ عبّر بالمعادلات عن الاشكال التالية ثم جد قيمة س :

(أ)



(ب)



٤/ ما العدد الذي إذا طرح منه ٩ وقسم ضعف الباقي على ٣ كان الناتج ١٢ ؟

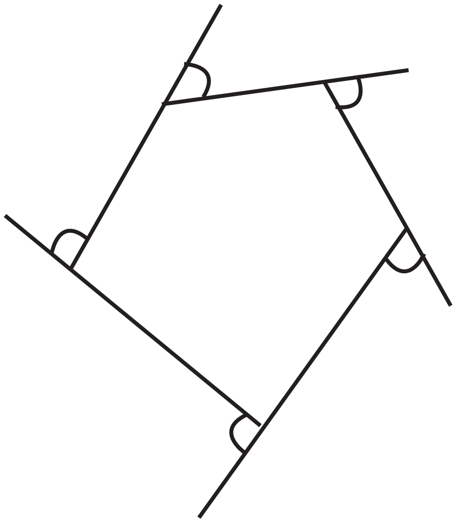
٥/ عددان صحيحان متتاليان ، إذا كان ٤ أمثال أصغرهما يزيد عن ٣ أمثال أكبرهما بمقدار ١٢ فما هما العددان ؟

٦/ ثلاثة أعداد صحيحة متتالية إذا كان ثلاثة أمثال الحد الأوسط يزيد عن مجموع العددين الآخرين بمقدار ٩ ، فما هذه الأعداد ؟

٧/ مستطيل طوله ضعف عرضه ، وضلع مربع يزيد ٢ سم عن عرض المستطيل ، فإذا كان محيط المربع يساوي محيط المستطيل أوجد ضلع المربع وبعدي المستطيل .

الوحدة الثالثة

المضلعات



تمرين مراجعة

١) اذكر أنواع المثلثات التي تعرفها.

٢) للمثلث ثلاثة .... وثلاثة ....

٣) مجموع درجات الزوايا الداخلية لأي مثلث تساوي ....

٤) اذكر حالات تطابق المثلثات.

٥) كم ضلعاً في المربع؟ وكذلك في المستطيل؟

٦) كم زاوية داخلية في المربع؟ وكذلك في المستطيل؟

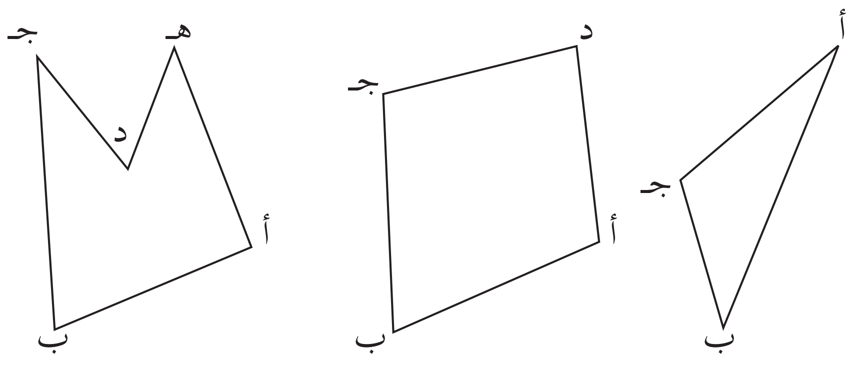
٧) كم تساوي مجموع درجات الزوايا الداخلية للمربع؟ وكذلك في المستطيل؟

٨) اذكر أنواع الأشكال الرباعية وخواصها.

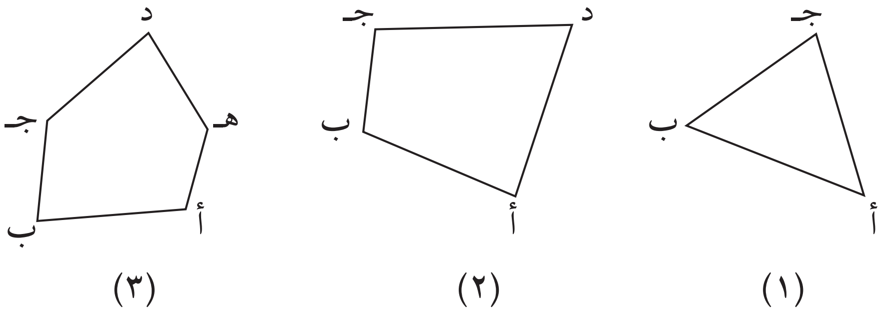
٩) اذكر أنواع الزوايا. أ/ ....ب/ ....ج/ ......د/....... هـ /........

١٠) ما هو قياس الزاوية القائمة ؟

١١) قس الزوايا الداخلية للأشكال الآتية ثم جد مجموعها ؟



(٣-١) المضلع:



ادرس كلاً من الأشكال الهندسية المستوية أعلاه :

(١) الشكل (١) :

(أ) كم ضلعاً يحدده ؟

(ب) كم زاوية فيه؟

(جـ) ما اسم هذا الشكل؟

(٢) الشكل (٢):

(أ) كم ضلعاً فيه ؟

(ب) كم عدد زواياه ؟

(جـ) ما اسمه ؟

(٣) الشكل (٣):

(أ) كم عدد اضلاعه ؟

(ب) هل عدد زواياه الداخلية تساوي عدد اضلاعه؟

(جـ) ماذا نسمي هذا الشكل؟

تلاحظ :

١ / أن الشكل يسمى بعدد اضلاعه.

٢ / عدد اضلاع الشكل يساوي عدد زواياه الداخلية.

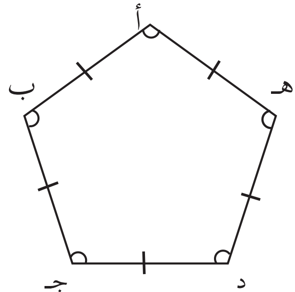
مثل هذه الاشكال الهندسية المستوية السابقة تسمى مضلعات وأصغرها المثلث.

تعريف :

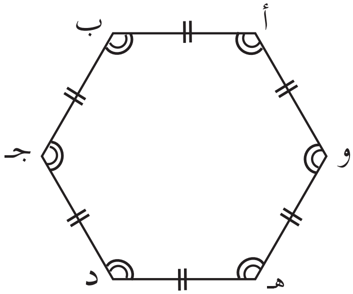
المضلع : هو شكل هندسي مستو مغلق يتكون من ثلاثة اضلاع فأكثر.
ويشتق اسمه من عدد اًضلاعه.

المضلع المنتظم: هو مضلع اضلاعه متساوية وزوايا الداخلية متساوية
مثل المثلث المتساوي الاضلاع والمربع.

مثال (١) : انظر الاشكال التالية :



الشكل (١)



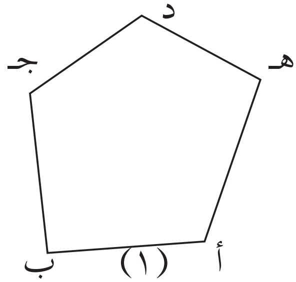
شكل (٢)

١ . اكتب أسماء الاضلاع المتساوية في كل شكل كما هو موضح في الرسم.
٢ . هل كل الاضلاع وكل الزوايا الداخلية متساوية في كل شكل ؟.

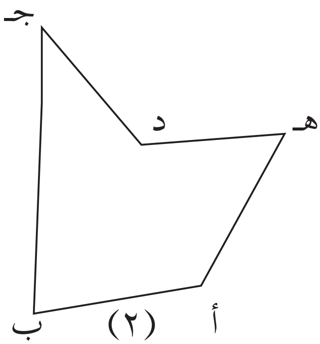
إذن الشكل(١) يسمّى خماسي منتظم و الشكل (٢) يسمّى سداسي منتظم

المضلع المحدب والمضلع المقعر:

أنظر إلى الشكلين التاليين:



(١)

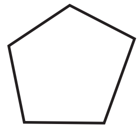
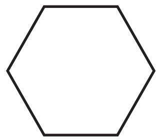
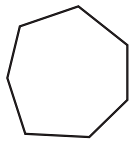


(٢)

الشكل الأول (١) يوضح مضلعاً كل زواياه الداخلية اقل من ١٨٠° ويسمّى مضلعاً محدباً.
أما الشكل (٢) فهو يوضح أن الزاوية هـ د جـ منعكسة أو أكبر من ١٨٠° فهو يسمّى مضلعاً مقعراً.

تمرين (٣ - ١)

(أ) أملأ الفراغات التي في الجدول أدناه:

الشكل	عدد أضلاعه	عدد زواياه الداخلية	اسمه
	٥	٥	خماسي
			
			
			ثماني

(ب) اذكر المضلعات غير المنتظمة مما يأتي :

١ . المثلث متساوي الأضلاع .

٢ . المثلث متساوي الساقين .

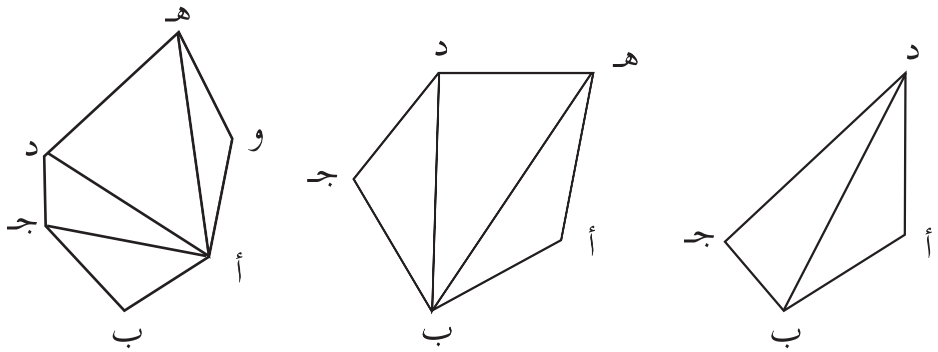
٣ . المعين .

٤ . متوازي الأضلاع .

(جـ) ارسم باستخدام المسطرة فقط مضلعاً خماسياً .

(٣-٢) مجموع الزوايا الداخلية للمضلع:

الأشكال الهندسية أدناه توضح مضلعات قُسّمت الأشكال الممكنة من رأس واحد.



(١) (٢) (٣)

في الشكل (١) قُسّم الرباعي إلى مثلثين.

في الشكل (٢) قُسّم الخماسي الى .... من المثلثات

في الشكل (٣) قُسّم الـ.............. إلى .... من المثلثات.

نلاحظ من الأشكال السابقة أن عدد المثلثات اقل من عدد اضلاع المضلع باثنين .

ونعلم أن مجموع الزوايا الداخلية لأي مثلث = ١٨٠° = ٢ قائمة

أكمل الجدول أدناه :

المضلع	عدد الأضلاع	عدد المثلثات	مجموع الزوايا الداخلية القوائم
المثلث	٣	٣ − ٢ = ١	١ × ٢ = ٢
الرباعي	٤	٤ − ٢ = ٢	٢ × ٢ = ٤
الخماسي	٥	٥ − ٢ = ٣	٣ × ٢ = ٦
السداسي			
السباعي			
الثماني			

من الجدول السابق يمكننا الحصول على قانون عام لإيجاد مجموع الزوايا الداخلية للمضلع:

قاعدة :

إذا كان عدد أضلاع المضلع ن ضلعاً ، فيكون به (ن − ٢) مثلثاً ، ويكون مجموع الزوايا الداخلية للمضلع مساوياً لعدد المثلثات مضروباً في مجموع زوايا المثلث الواحد الداخلية إذن :

مجموع الزوايا الداخلية للمضلع = (ن − ٢) × ٢ زاوية قائمة

= (٢ن − ٤) زاوية قائمة

مثال (١):

(١) المثلث عدد اضلاعه ٣، إذن ن = ٣

مجموع زواياه الداخلية له هي (٣ − ٢) × ٢ زاوية قائمة

= ٢ زاوية قائمة = ٢ × ٩٠° = ١٨٠°

(٢) المربع عدد اضلاعه ٤، إذن ن = ٤

مجموع الزوايا الداخلية له هي (٤ − ٢) × ٢ قائمة

= ٤ قوائم = ٤ × ٩٠° = ٣٦٠°

(٣) ما مجموع الزوايا الداخلية للخماسي ؟

ن = ٥ إذن مجموع الزوايا الداخلية = (ن − ٢) × ٢ قائمة

= (٥ − ٢) × ٢ قائمة = ٦ قوائم = ٦ × ٩٠° = ٥٤٠°

مثال (٢): جد الزاوية الداخلية لمضلع منتظم به ١٠ أضلاع.

الحل: مجموع زواياه الداخلية = (٢ ن − ٤) زاوية قائمة

= (٢ × ١٠ − ٤) قائمة = ١٦ زاوية قائمة

= ١٦ × ٩٠° = ١٤٤٠°

مقدار الزاوية الداخلية $= \frac{١٦ \times ٩٠°}{١٠} = \frac{١٤٤٠°}{١٠} = ١٤٤°$

مثال (٣):

جد عدد أضلاع المضلع المنتظم الذي فيه كل من زواياه الداخلية ١٥٠°.

الحل :

كل زاوية داخلية = ١٥٠°

إفترض إن عدد أضلاع المضلع = ن

مجموع الزوايا الداخلية للمضلع = (ن – ٢) × ٢ زاوية قائمة

= (٢ن – ٤) زاوية قائمة

عدد الزوايا الداخلية = عدد الأضلاع = ن

إذن :

$$١٥٠° = \frac{(٢ن - ٤) \times ٩٠°}{ن}$$

١٥٠ ن = ١٨٠ ن – ٣٦٠°

٣٠ ن = ٣٦٠°

$$ن = \frac{٣٦٠}{٣٠} = ١٢ \text{ ضلع}$$

تمرين (٣ - ٢)

١) إذا كانت زاويتان في مثلث هي ٧٠°، ٨٠° جد الزاوية الثالثة.

٢) جد الزاوية الخامسة في خماسي فيه أربعة من زواياه الداخلية هي ١٤٠°، ٦٥°، ٥٥°، ١٦٠°.

٣) جد مجموع الزوايا الداخلية من المضلعات الآتية:

أ/ سداسي

ب/ عشاري

جـ/ مضلع به ١٣ ضلعاً .

٤) جد عدد اضلاع مضلع منتظم فيه كل من زواياه الداخلية ١٣٥°.

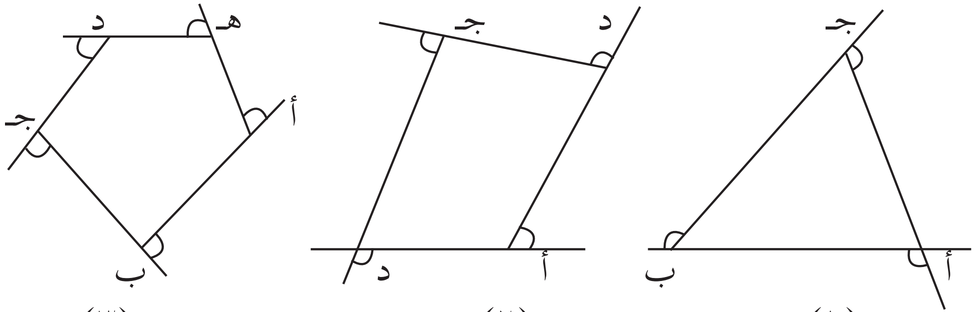
٥) في المضلع الخماسي المنتظم أ ب جـ د هـ أحسب مقدار كل من زوايا المثلث أ ب جـ.

(٣ - ٣) : الزوايا الخارجية للمضلع

تمهيد:

١) إذا مد كل ضلع في مضلع في اتجاه واحد فإن الزاوية التي يصنعها امتداد كل ضلع مع الضلع الآخر تسمى زاوية خارجية للمضلع.

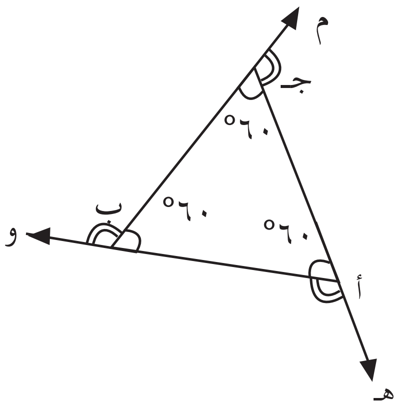
٢) انظر الأشكال التالية:



(١) (٢) (٣)

كل الزوايا المشار إليها في كل مضلع هي زواياه الخارجية.

مثال (١): جد مجموع الزوايا الخارجية في المثلث متساوي الاضلاع أدناه.



الحل: مجموع زوايا المثلث الداخلية = ١٨٠°.

بما أن المثلث أ ب جـ متساوي الأضلاع فإن كل زاوية داخلية = ٦٠°

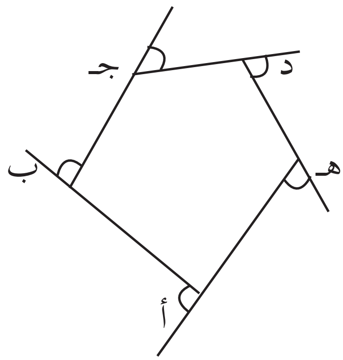
∠ هـ أ ب + ∠ جـ أ ب = ١٨٠° (متكاملتان)

ولكن ∠ جـ أ ب = ٦٠° ، ∠ هـ أ ب = ١٨٠° − ٦٠° = ١٢٠°

وبنفس الطريقة ∠ أ جـ م = ١٨٠° − ٦٠° = ١٢٠° و ∠ وب جـ = ١٢٠°

∴ مجموع الزوايا الخارجية = ٣ × ١٢٠° = ٣٦٠° = ٤ قوائم.

مثال (٢) : جد مجموع الزوايا الخارجية لخماسي منتظم أ ب جـ د هـ



الحل: الزاوية داخلية + الزاوية الخارجية المجاورة لها = ١٨٠° = ٢ قائمة.

مجموع زوايا الخماسي الداخلية = (٥ – ٢) × ٢ قائمة = ٦ قوائم .

ولكن كل الزوايا الداخلية والخارجية للخماسي =

٥ × (الزاوية الداخلية + الزاوية الخارجية المجاورة لها)

= ٥ × ٢ قوائم = ١٠ قوائم.

∴ مجموع الزوايا الخارجية للخماسي = ١٠ – ٦ = ٤ قوائم .

ومن الأمثلة السابقة يمكن التوصل للقاعدة التالية :

قاعدة:

مجموع الزوايا الخارجية لأي مضلع = ٤ قوائم = ٣٦٠°.

مثال (٣) :

جد عدد أضلاع مضلع منتظم فيه مقدار الزاوية الداخلية له تساوي ١٦٠°.

الحل: مقدار الزاوية الخارجية = ١٨٠° – ١٦٠° = ٢٠°

مجموع الزوايا الخارجية = عدد أضلاع المضلع × مقدار الزاوية الخارجية

∴ عدد الاضلاع = $\frac{٣٦٠°}{٢٠°}$ = ١٨ ضلع

مثال (٤): جد مقدار الزاوية الخارجية لمضلع منتظم به ١٥ ضلعاً.

الحل: مجموع الزوايا الخارجية له = ٤ قوائم = ٣٦٠°

∴ الزاوية الخارجية = $\frac{٣٦٠°}{١٥}$ = ٢٤°

تمرين : (٣-٣)

(١) أحسب مقدار الزاوية الخارجية لكل من:

أ. مضلع منتظم به ١٠ أضلاع.

ب. مضلع منتظم به ٢٠ ضلع.

جـ. مضلع منتظم سداسي.

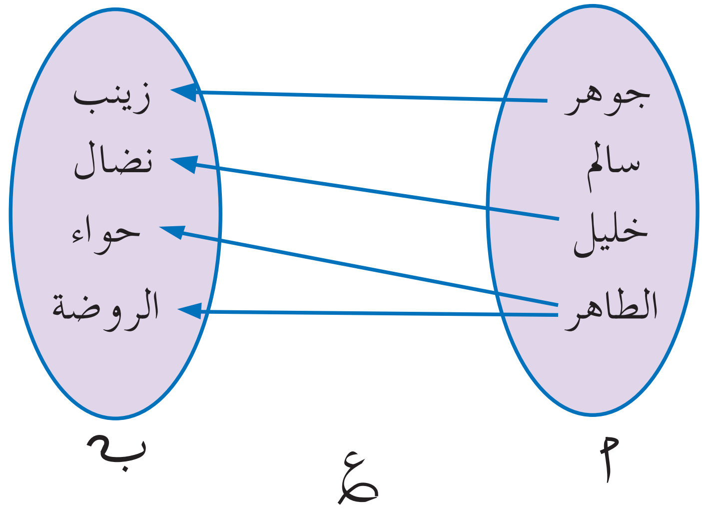
(٢) ما عدد أضلاع مضلع منتظم زاويته الداخلية:

أ. 140°

ب. 90°

الوحدة الرابعة

الزوج المرتب والعلاقات



(٤ - ١) الزوج المرتب

نلاحظ في مباريات كرة القدم أن نتيجة المباراة تكتب على صورة الشكل (١)

الهلال	٤	٣	المريخ

الشكل (١)

ماذا تعني هذه النتيجة في الشكل (١) ؟

ماذا تعني نتيجة المباراة في الشكل (٢) ؟

الهلال	٣	٤	المريخ

الشكل (٢)

هل نتيجة المباراة في الشكل (١) هي نفس نتيجة المباراة في الشكل (٢) ؟

فالشكل (١) يعني أن فريق الهلال سجل أربعة أهداف في مرمى المريخ بينما دخل مرماه ثلاثة أهداف.

أما الشكل (٢) يعني أن فريق الهلال سجل ثلاثة أهداف في مرمى المريخ بينما دخل مرماه أربعة أهداف.

ومما سبق يمكن القول أن:

التعبيران ٤ ، ٣ و ٣ ، ٤ مختلفان.

ومثل هذه التعبيرات تكتب بين قوسين (... ، ...) هكذا ونفصل بين المتغيرين داخل القوس بفاصلة هكذا (،) ويسمى زوجاً مرتباً.

ونظراً لأهمية الترتيب كما لاحظنا فإن التعبيرين السابقين يكتبان على الصورة الآتية:

(٤ ، ٣) ، (٣ ، ٤) حيث (٤ ، ٣) تختلف عن (٣ ، ٤)

> إذن الزوج المرتب المكوّن من العنصرين س ، ص نرمز له بالرمز (س ، ص) حيث نسمّي س بالمكوّن (المسقط) الأول ، ص بالمكوّن (المسقط) الثاني.

ونلاحظ مما سبق ما يلي:

(١) (س ، ص) ≠ (ص ، س) إلا إذا كان س = ص .

(٢) إذا كان (س ، ص) = (أ ، ب) فإن س = أ ، ص = ب .

(٣) الزوج المرتب (س ، ص) مختلف عن المجموعة { س ، ص }

لأن (س ، ص) ≠ (ص ، س)

بينما { س ، ص } = { ص ، س } .

مثال (١) : أي الأزواج التالية أزواج مرتبة. حدد المكوّن الأول والمكوّن الثاني إذا كان الزوج مرتباً. (١ ، ٧) ؛ ٦ ، ٢ ؛ (٥ – ١) ؛ (٤ ، ٠) ؛ (–١ و ٣)

الحل: (١ ، ٧) زوج مرتب مكوّنه الأول ١ والثاني ٧
٦ ، ٢ ليس زوجاً مرتباً. ، (٥ – ١) ليس زوجاً مرتباً.
(٤ ، ٠) زوج مرتب مكوّنه الأول ٤ والثاني ٠
(–١ و ٣) ليس زوجاً مرتباً.

مثال (٢): جد قيمة كل من س ، ص في الحالات التالية إذا كان:
أ . (س ، ١) = (٢ ، ص)
ب. (س – ٢ ، ٣) = (١ ، ٢ص + ١)

الحل: أ. ∵ (س ، ١) = (٢ ، ص)
∴ س = ٢ ، ص = ١
ب. ∵ (س – ٢ ، ٣) = (١ ، ٢ص + ١)
فإن س – ٢ = ١ ∴ س = ٣
٣ = ٢ص + ١ ∴ ٢ص = ٢ ∴ ص = ١

تمرين : (٤ – ١)

(أ) أي الأزواج التالية أزواج مرتبة ؟
(١) (–١ ، ٢) (٢) (٥ و ٩) (٣) ٦ ، ٧
(٤) (س ، ص) (٥) س + ٢ ، ٤ (٦) (س – أ ، ص – ب)

(ب) حدّد المكوّن الأول والمكوّن الثاني من الأزواج المرتبة الآتية:
(١) (٢ ، ٨) (٢) (م ، – ن)
(٣) (٧ + س ، ص) (٤) (س – هـ ، ص + ١)

(جـ) جد قيمة كل من س ، ص إذا كان:
(١) (س ، ص) = (٩ ، –٦) (٢) (س – ٣ ، ص) = (١ ، ٤)
(٣) (ص + ٣ ، ٢) = (–٤ ، س) (٤) (٣س + ٢ ، ص) = (–١ ، ٢ص – ٢)

(٤ – ٢) حاصل الضرب الديكارتي :

إذا كانت توجد ثلاثة طرق تصل بين منزلك والمدرسة التي تدرس بها، ولتكن مجموعة هذه الطرق هي:

س = { أ ، ب ، جـ }

ويمكنك الوصول الى المدرسة بوسيلتي مواصلات هي الدراجة ولتكن د، والحافلة ولتكن هـ، اي مجموعة المواصلات هي:

ص = { د ، هـ }

ما الحالات التي تصل بها من منزلك إلى المدرسة مستخدماً هذه الطرق وتلك المواصلات ؟

الطرق	المواصلات	الحالات
أ	د	(أ ، د)
	هـ	(أ ، هـ)
ب	د	(ب ، د)
	هـ	(... ، ...)
جـ	د	(... ، ...)
	هـ	(... ، ...)

اكمل الجدول السابق .

فإذا كتبنا الحالات المختلفة للوصول إلى المدرسة على هيأة مجموعة من الأزواج المرتبة التي مكوّناتها الأولى تنتمي إلى مجموعة الطرق س ومكوّناتها الثانية تنتمي إلى مجموعة وسائل المواصلات ص فإننا نحصل على المجموعة التالية:

{ (أ ، د) ، (أ ، هـ) ، (ب ، د) ، (ب ، هـ) ، (جـ ، د) ، (جـ ، هـ)}

مما سبق تلاحظ أنه اذا كان لدينا مجموعتان س، ص فإننا نحصل على مجموعة الازواج المرتبة التي مكوّناتها الاولى هي عناصر المجموعة الاولى ، ومكوّناتها الثانية هي عناصر المجموعة الثانية ، وتسمّى مجموعة الازواج المرتبة هذه بحاصل الضرب الديكارتي للمجموعتين س ، ص بهذا الترتيب وتكتب في الصورة س × ص اي أن:

س × ص = {(س ، ص) : س ∈ س، ص ∈ ص }

حيث (س ، ص) ≠ (ص ، س) إلا إذا كانت س = ص

مثال (١) : إذا كان س = {١ ، ٣ }، ص = {٢ ، ٤ ، ٥ } جد:

(١) س × ص (٢) ص × س (٣) س × س

(٤) هل س × ص = ص × س

٥) هل عدد عناصر س × ص = عدد عناصر ص × س

الحل:

(١) س × ص = {(١ ، ٢) ، (١ ، ٤) ، (١ ، ٥) (٣ ، ٢) ، (٣ ، ٤) ، (٣ ، ٥) }

(٢) ص × س = {(٢ ، ١) ، (٢ ، ٣) ، (٤ ، ١) (٤ ، ٣) ، (٥ ، ١) ، (٥ ، ٣) }

(٣) س × س = {(١ ، ١) ، (١ ، ٣) ، (٣ ، ١) (٣ ، ٣)}

(٤) بما أن (ص ، س) ≠ (ص ، س)

∴ س × ص ≠ ص × س

(٥) عدد عناصر س × ص = ٦

عدد عناصر ص × س = ٦

∴ عدد عناصر س × ص = عدد عناصر ص × س

نتيجة:

إذا كانت س ، ص مجموعتين منتهيتين وغير خاليتين فإن:

(١) س × ص ≠ ص × س حيث س ≠ ص

(٢) عدد عناصر س × ص = عدد عناصر ص × س

= عدد عناصر س × عدد عناصر ص

(٣) س × س = {(أ ، ب) : أ ∈ س ، ب ∈ س }وتكتب أحياناً س^{٢}

وتقرأ (س تحصيل نفسها)

(٤) إذا كان (م ، ن) ∈ س × ص فإن م ∈ س ، ن ∈ ص

مثال (٢): إذا كان س = {٣ ، ب ، جـ }، ص = {ب ، ٢ }، ع = {٢ ، ٣ }

جد:

(١) س × (ص ∩ ع) (٢) (س ∪ ص) × ع (٣) (س × ع) ∩ (ص × ع)

الحل:

(١) ص ∩ ع = {٢}

∴ س × (ص ∩ ع) = {٣ ، ب ، جـ} × {٢}

= {(٣ ، ٢) ، (ب ، ٢) ، (جـ ، ٢)}

(٢) س ∪ ص = {٣ ، ب ، جـ ، ٢}

(س ∪ ص) × ع = {٣ ، ب ، جـ ، ٢} × {٢ ، ٣}

= {(٣ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (ب ، ٢) ، (ب ، ٣) ، (جـ ، ٢) ، (جـ ، ٣) ، (٢ ، ٢) ، (٢ ، ٣)}

(٣) س × ع = {(٣ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (ب ، ٢) ، (ب ، ٣) ، (جـ ، ٢) ، (جـ ، ٣)}

ص × ع = {(ب ، ٢) ، (ب ، ٣) ، (٢ ، ٢) ، (٢ ، ٣)}

∴ (س × ع) ∩ (ص × ع) = {(ب ، ٢) ، (ب ، ٣)}

تمرين (٤ – ٢)

(أ) إذا كان س = {٠ ، ٤} ، ص = {١ ، ٢ ، ٥} جد:

(١) س × ص (٢) ص × س (٣) س × س (٤) ص^{٢}

(ب) إذا كان س = {١} ، ص = {٢ ، ٥} ، ع = {٣ ، ٥ ، ٧} جد:

(١) س × ع (٢) س^{٢} (٣) س × (ص ∩ ع)

(٤) (ع ∩ ص) × ع (٥) (س × ص) ∪ (ص × ع)

(٦) (ع – ص) × (س ∪ ص)

(٤ – ٣) العلاقات

تأمل المثال التالي:

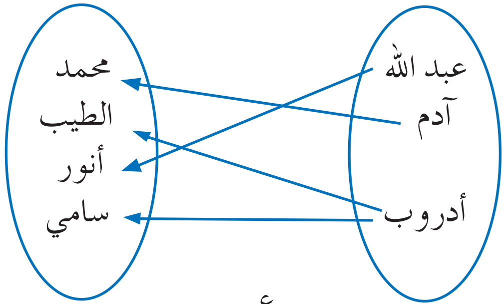
لنفترض أنّ المجموعة س هي مجموعة التلاميذ: عبدالله ، آدم ، أدروب.

أي أنّ س = { عبدالله ، آدم ، أدروب }

وأنّ ص = { محمد ، الطيب ، أنور ، سامي }

ونفرض أنّ علاقة صداقة ربطت بين عناصر هاتين المجموعتين حيث كان عبدالله صديقاً لأنور، وآدم صديقاً لمحمد، وأدروب صديقاً لكل من الطيب وسامي.

يمكننا التعبير عن علاقة الصداقة السابقة بالشكل التالي:



س ع ص

الشكل (١)

حيث أنّ التعبير بالشكل (١) يسمى المخطط السهمي.

وأيضاً يمكن التعبير عن هذه العلاقة بطريقة أخرى وذلك بضم كل شخصين تربطهما هذه العلاقة معاً كزوج مرتب، المكوّن الأول فيه من المجموعة س صديق المكوّن الثاني من المجموعة ص .

فالزوج المرتب (عبدالله ، أنور) يدل على أن عبدالله صديق أنور، وكذلك (آدم ، محمد) يعني أن آدم صديق محمد وهكذا.

ونعبّر عن علاقة الصداقة هذه بمجموعة الأزواج التي مكوّناتها الأولى عناصر من المجموعة س تربطها علاقة الصداقة هذه مع المكوّنات الثانية من المجموعة ص ، وكثيراً ما نرمز للعلاقة بالرمز ع .

وتكتب ع : س ⟵ ص وتقرأ ع علاقة من المجموعة س إلى المجموعة ص .

ويعبّر عنها بالصفة المميزة ع = { (س ، ص) : س ∈ س ، ص ∈ ص }

فعلاقة الصداقة السابقة يمكن تمثيلها بمجموعة الأزواج المرتبة:

ع = { (عبدالله ، أنور) ، (آدم ، محمد) ، (أدروب ، الطيب) ، (أدروب ، سامي) }

نلاحظ مما سبق:

(١) أنّ كل عنصر من عناصر العلاقة هو زوج مرتب.

(٢) وجود الصلة بين المكوّن الأول والمكوّن الثاني في الزوج المرتب الواحد والصلة هي صديق.

إنّ الصلة التي تربط كل عنصر في المجموعة س وعنصر آخر في المجموعة ص تسمى قاعدة الاقتران.

ونقول أنّ قاعدة الاقتران هذه تعرّف العلاقة من المجموعة س إلى المجموعة ص.

تعريف:

العلاقة هي ارتباط بين عناصر مجموعتين. تسمّى المجموعة الأولى المجال وتسمّى المجموعة الثانية المجال المقابل.

ففي المثال السابق تكون س هي المجال ، ص المجال المقابل.

نلاحظ من التعريف الآتي:

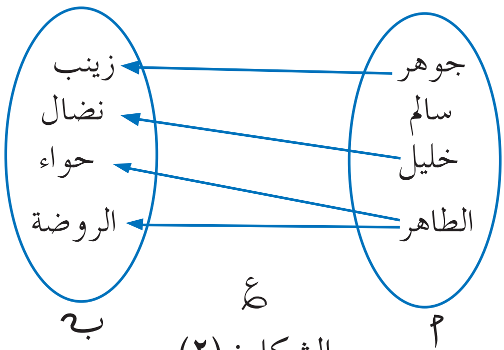
(١) ليس من الضروري أن يرتبط كل عنصر في المجال بعنصر أو أكثر في المجال المقابل.

(٢) ليس من الضروري أن يكون كل عنصر في المجال المقابل يرتبط به عنصر أو أكثر من المجال.

مثال (١): إذا كان أ = {جوهر ، سالم ، خليل ، الطاهر}

ب = {زينب ، نضال ، حواء ، الروضة}

وكانت ع علاقة (زوج) من المجموعة أ إلى المجموعة ب موضحة بالمخطط السهمي التالي:



الشكل : (٢)

عبّر عن العلاقة ع في صورة مجموعة عناصرها أزواج مرتبة.

الحل:

ع = {(جوهر ، زينب) ، (خليل ، نضال) ، (الطاهر ، حواء) ، (الطاهر ، الروضة)}

العلاقات على مجموعات الأعداد:

هنالك علاقات من نوع آخر كالتي عناصرها أعداد. ومن هذه العلاقات:

١/ علاقة (أكبر من) ٢/ علاقة (أصغر من)

٣/ علاقة (يساوي) ٤/ علاقة (ضعف)

٥/ علاقة (ثلاثة أمثال) ٦/ علاقة (عامل من عوامل)

مثال (٢): إذا كان س = {٢، ٥، ٦} ، ص = {٣، ٤، ٧}

حيث ع : س ← ص

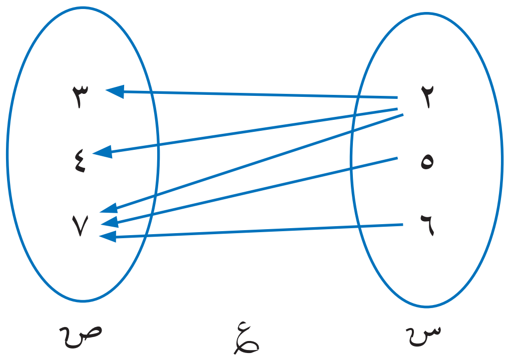
معرفة بقاعدة الأقتران .... أصغر من ....

(١) مثّل العلاقة ع بمخطط سهمي.

(٢) اكتب المجال والمجال المقابل للعلاقة ع .

الحل:

(١)



(٢) المجال = {٢، ٥، ٦} أو س

المجال المقابل = {٣، ٤، ٧} أو ص

مثال (٣): إذا كان ع : ط ← ط علاقة معرّفة بقاعدة الاقتران: س + ص = ٤

اكتب ع في صورة مجموعة عناصرها أزواج مرتبة.

الحل: للإجابة على هذا يجب أولاً أن نحدد المجال والمجال المقابل ثم نحدد طبيعة الاقتران.

نلاحظ أن كلاً من المجال والمجال المقابل هو مجموعة الاعداد الطبيعية.

حيث أنّ كل عنصر في ع هو زوج مرتب مكوّنه الأول عدد طبيعي والثاني عدد طبيعي أيضاً ومجموعهما يحقق : س + ص = ٤

ع = {(١ ، ٣) ، (٣ ، ١) ، (٢ ، ٢)}

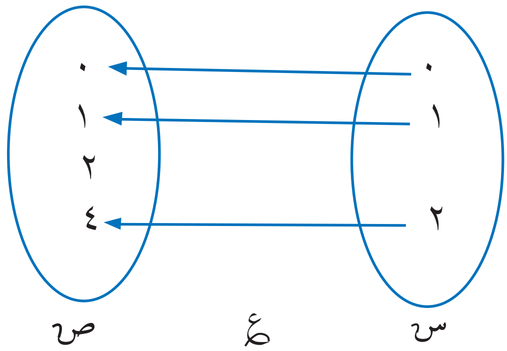
إذا كان مجال العلاقة ع ومجالها المقابل هو المجموعة نفسها فنقول أن العلاقة ع علاقة على هذه المجموعة.

∴ ع علاقة على ط .

تمرين : (٤ – ٣)

(١) إذا كان س = {٠ ، ١ ، ٢} ، ص = {٠ ، ١ ، ٢ ، ٤}

ع : س ← ص علاقة معرّفة بالمخطط السهمي التالي:



أ/ اكتب المجال والمجال المقابل للعلاقة ع .

ب/ اكتب ع في صورة أزواج مرتبة.

جـ/ اكتب قاعدة الاقتران للعلاقة ع .

(٢) إذا كان ع : {أ ، ب ، جـ} ← {٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧}

حيث ع = {(أ ، ٧) ، (ب ، ٢) ، (ب ، ٥) ، (جـ ، ٣)}

عبّر عن ع بالمخطط السهمي.

(٣) إذا كان م = {١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩}

ع : م ← م معرّفة بالقاعدة: س + ص > ٨ (س ، ص ∈ م)

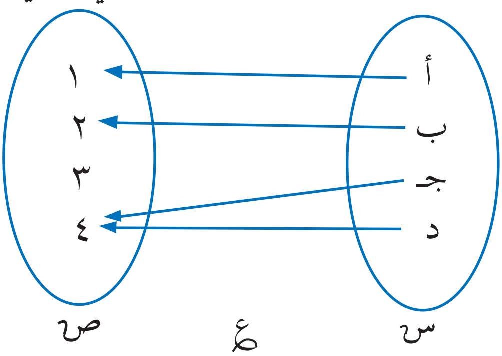
أ/ ما المجال والمجال المقابل للعلاقة ع ؟

ب/ اكتب ع في صورة أزواج مرتبة.

(٤ - ٤) صورة العنصر ومدى العلاقة:

إذا كان س = { أ ، ب ، جـ ، د } ، ص = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }

وكانت ع : س ← ص معرفة بالمخطط السهمي التالي :



نلاحظ مما سبق:

- ع = { (أ ، ١) ، (ب ، ٢) ، (جـ ، ٤) ، (د ، ٤) }

  حيث أن العبارة (أ ، ١) ∈ ع تكتب أ ع ١

  وتقرأ أ يرتبط مع ١ بالعلاقة ع .

  وانّ العبارة (أ ، ٢) ∈ ع عبارة غير صحيحة وتكتب (أ ، ٢) ∉ ع

  أو أ ع̸ ٢ وتقرأ أ لا يرتبط مع ٢ بالعلاقة ع .

- إنّ العنصر أ في المجال س اقترن مع العنصر ١ في المجال المقابل ص ، ونسمّي العنصر ١ صورة للعنصر أ . وبالمثل نسمّي العنصر ٢ صورة للعنصر ب .

  ما صورة كل من العنصرين جـ ، د ؟

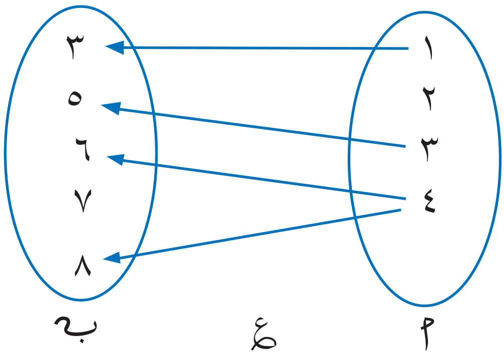
- إن المجموعة { ١ ، ٢ ، ٤ } هي صور لعناصر المجال وتسمّى **مدى العلاقة**.

  لاحظ أن المدى مجموعة جزئية من المجال المقابل.

تعريف:

> مدى العلاقة هو مجموعة صور عناصر المجال في المجال المقابل

مثال (١): إذا كان ع : أ ← ب معرّفة بالمخطط السهمي التالي:



(١) اكتب المجال والمجال المقابل.

(٢) جد صور كل من العناصر ١ ، ٢ ، ٣

(٣) اكتب مدى ع .

(٤) اكتب ع في صورة مجموعة عناصرها أزواج مرتبة.

الحل: (١) المجال = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤}

المجال المقابل = {٣ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨}

(٢) صورة العنصر ١ هي ٣ ، العنصر ٢ ليس له صورة ،
صورة العنصر ٣ هي ٥

(٣) مدى العلاقة ع = {٣ ، ٥ ، ٦ ، ٨}

(٤) ع = {(١ ، ٣) ، (٣ ، ٥) ، (٤ ، ٦) ، (٤ ، ٨)}

مثال (٢): ع : {٠ ، ٢ ، ٥} ← {١ ، ٢ ، ٣ ، ٧}

بحيث أنه اذا كان س ينتمي إلى مجال ع فإن س يقترن مع س + ١ .

أي العبارات التالية صواب وأيها خطأ:

(١) ٠ ع ١ (٢) ٥ ع ٧

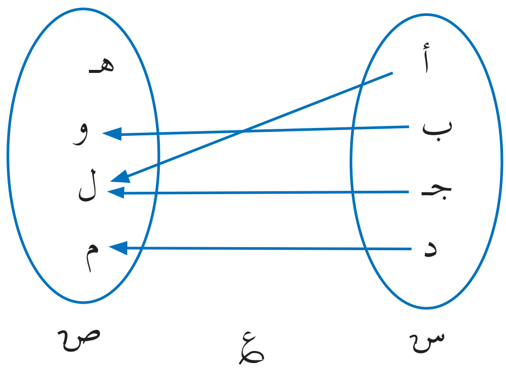
(٣) ٢ ~~ع~~ ٣ (٤) مدى ع = {١ ، ٣}

الحل: (١) ٠ ع ١ صواب. (٢) ٥ ع ٧ خطأ.

(٣) ٢ ~~ع~~ ٣ خطأ. (٤) مدى ع = {١ ، ٣} صواب.

تمرين (٤ – ٤)

(١) إذا كانت ع : س ← ص معرفة بالمخطط السهمي التالي:



(أ) جد صور كل من ب ، جـ ، د .

(ب) اكتب مدى ع .

(جـ) اكتب ع في صورة مجموعة عناصرها أزواج مرتبة.

(د) أي العبارات التالية صائبة : أ ع هـ ، جـ ~~ع~~ و ، د ع م

(٢) إذا كانت ع : أ ← ب وضّح أي العبارات التالية صواب وأيها خطأ:

(أ) ع ⊂ أ × ب

(ب) إذا كان س ع ص فإن س صورة ص .

(جـ) إذا كانت س صورة ص فإن ص ع س .

(د) مجال ع دائماً يساوي أ .

(٣) إذا كان ع = {(٣ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٢ ، ٣) ، (٢ ، ١) ، (١ ، ٤)}

جد: (أ) مجموعة العناصر التي صورتها ٣ .

(ب) مجموعة العناصر التي تمثل صوراً للعنصر ٢ .

(٤) إذا كانت س = {٠ ، ١ ، ٣ ، ٤} ، ص = {٠ ، ٢ ، ٦ ، ٨ ، ١٠}

وكانت ع : س ← ص معرّفة على النحو التالي:

س ترتبط بـ ٢ س ، س ∈ س

(أ) مثّل ع بمخطط سهمي.

(ب) اكتب مدى العلاقة ع .

(جـ) اكتب ع كمجموعة أزواج مرتبة.

(٥) لتكن ع = {(١ ، ٣) ، (٢ ، ٦) ، (٥ ، ١٥)} اكتب قاعدة اقتران العلاقة ع .

(٦) إذا كانت أ = {١ ، ٤ ، ٦ ، ٨}، ب = {٢ ، ٣ ، ٥ ، ٩}

وكانت ع : أ ← ب حيث س ∈ أ يرتبط مع ص ∈ ب

إذا كان س > ص .

(أ) اكتب ع في صورة أزواج مرتبة.

(ب) ما مدى العلاقة ع ؟ هل المدى = المجال المقابل ؟

(٤ – ٥) العلاقة العكسية:

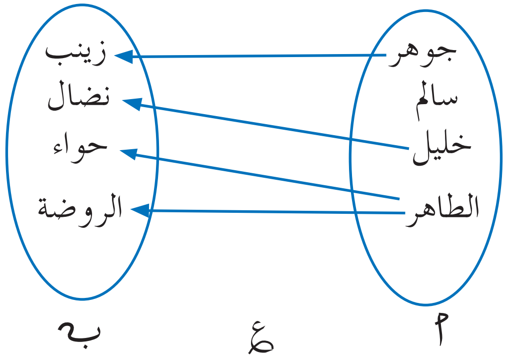
إذا اعتبرنا علاقة زوج التي مرت بنا سابقاً والتي ربطت بين المجموعة:

م = { جوهر ، سالم ، خليل ، الطاهر }

وعناصر المجموعة:

ب = { زينب ، نضال ، حواء ، الروضة }

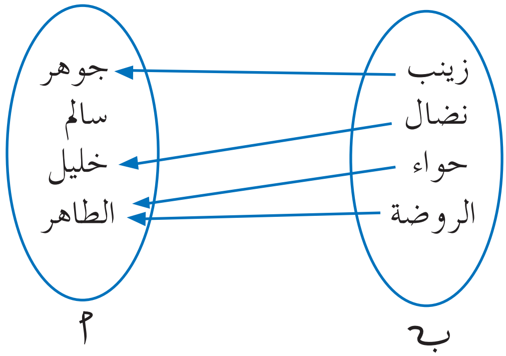
والتي مثلها المخطط السهمي:



الشكل (١)

فإننا يمكننا التعبير عن العلاقة التي تربط العناصر من المجموعة الثانية ب بعناصر المجموعة الأولى م والتي نعرّفها بعلاقة زوجة نجد أنّ: زينب زوجة جوهر، نضال زوجة خليل، حواء زوجة الطاهر، الروضة زوجة الطاهر.

وهي أيضاً علاقة يمكن تمثيلها من المجموعة ب إلى المجموعة م سهمياً كالآتي:



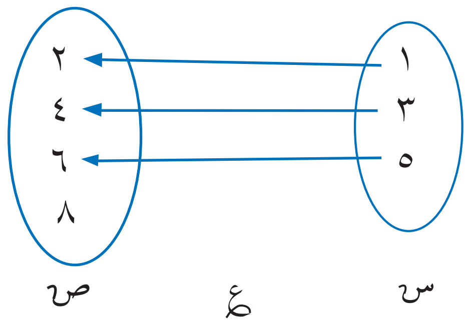
الشكل (٢)

نجد أنّ العلاقة الجديدة تنتج إذا عكسنا اتجاه الأسهم في العلاقة الأولى ع وجعلنا المجال المقابل للعلاقة الأولى ع مجالاً لها ، ومجال العلاقة ع مجالاً مقابلاً لها.

تسمى هذه العلاقة **بالعلاقة العكسية** للعلاقة ع ويمثلها المخطط السهمي بالشكل (٢) السابق ويرمز لها بالرمز ع$^{-١}$ وتقرأ العلاقة العكسية للعلاقة ع .
وإذا كانت ع علاقة من أ إلى ب فإن ع$^{-١}$ (العلاقة العكسية) من ب إلى أ نعرفها على النحو التالي:

ع$^{-١}$ = { (ص ، س) : (س ، ص) ∈ ع }

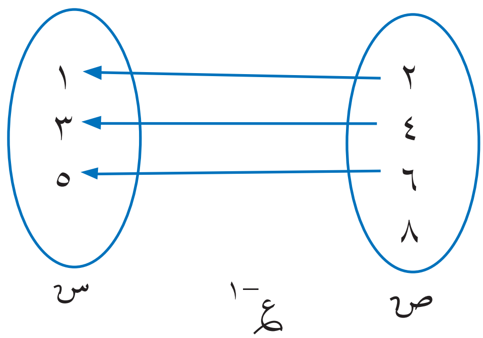
مثال (١): إذا كان ع : س ← ص حيث:
س = { ١ ، ٣ ، ٥ } ، ص = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ } معرّفة بالمخطط السهمي التالي:



(١) اكتب ع في صورة مجموعة.
(٢) مثّل ع$^{-١}$ بمخطط سهمي.
(٣) اكتب ع$^{-١}$ في صورة مجموعة.

الحل: (١) ع = { (١ ، ٢) ، (٣ ، ٤) ، (٥ ، ٦) }

(٢)



(٣) ع$^{-١}$ = { (٢ ، ١) ، (٤ ، ٣) ، (٦ ، ٥) }

مثال (٢): إذا كانت س = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }

ع علاقة من س إلى س قاعدة اقترانها هي: س يقترن مع س + ٢

(١) اكتب ع في صورة مجموعة.

(٢) مثّل $ع^{-١}$ بمخطط سهمي.

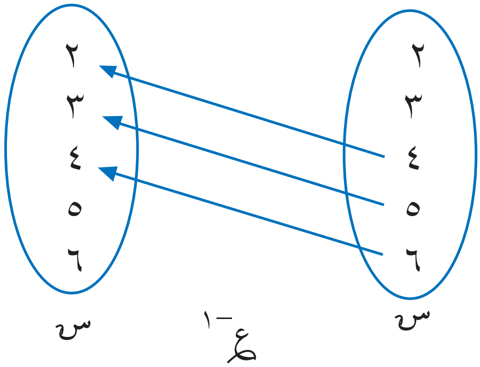
(٣) اكتب قاعدة اقتران $ع^{-١}$.

(٤) جد مدى كل من ع ، $ع^{-١}$.

(٥) ما العلاقة بين مدى ع ومجال $ع^{-١}$ ؟

الحل: (١) ع = {(٢ ، ٤) ، (٣ ، ٥) ، (٤ ، ٦)}.

(٢)



(٣) قاعدة اقتران $ع^{-١}$ هي: س يقترن مع س − ٢

(٤) مدى ع = { ٤ ، ٥ ، ٦ }

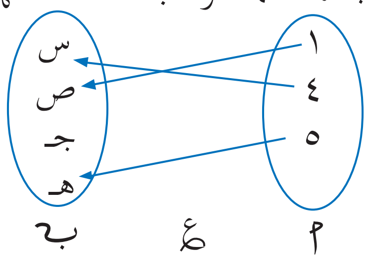
مدى $ع^{-١}$ = { ٢ ، ٣ ، ٤ }

(٥) مدى ع مجموعة جزئية من مجال $ع^{-١}$.

تمرين: (٤ – ٥)

(١) إذا كانت ع : أ ← ب حيث: أ = { ١ ، ٤ ، ٥ }

ب = { س ، ص ، جـ ، هـ } معرّفة بالمخطط السهمي التالي:



أ . اكتب $ع$ في صورة مجموعة.

ب. اكتب $ع^{-1}$ في صورة مجموعة.

جـ . عبّر عن $ع^{-1}$ بمخطط سهمي.

د . جد مدى كل من $ع$ ، $ع^{-1}$

(٢) إذا كانت $ع$: ط ← ط معرّفة بقاعدة الاقتران: س يقترن مع $س^{2}$.

اكتب قاعدة الاقتران لـ $ع^{-1}$.

(٣) إذا كان ص = { أ ، ب ، جـ ، د }

$ع_{1}$: ص ← ص ، $ع_{2}$: ص ← ص

$ع_{1}$ = { (أ ، جـ) ، (ب ، جـ) ، (جـ ، د) ، (د ، ب) }

$ع_{2}$ = { (أ ، أ) ، (ب ، د) ، (جـ ، د) }

جد:

أ. مدى $ع_{1}$ ب. مدى $ع_{2}$ جـ . $ع_{1} \cap ع_{2}$

د. $ع_{1} \cup ع_{2}$ هـ. $ع_{1}^{-1}$ و. $ع_{2}^{-1}$

ي. $ع_{1} \cap ع_{2}^{-1}$

(٤) إذا كانت ع: ط ← ط معرّفة بالعلاقة ع = { (س ، ص) : س + ص = ٥ }

جد: أ . $ع$ في صورة مجموعة عناصرها أزواج مرتبة.

ب. $ع^{-1}$ في صورة مجموعة عناصرها أزواج مرتبة.

جـ. مدى $ع$ ، مدى $ع^{-1}$.

د . ما العلاقة بين مدى $ع$ ، مدى $ع^{-1}$.

تمرين عام

(١) إذا كان (س ، ٣) = (−٢ ، ص) جد قيمة س ، ص.

(٢) إذا كان (٢س + ١ ، ٢ص − ٣) = (س + ٢ ، ص)

جد : س ، ص حيث س ، ص ∈ ط .

(٣) إذا كان س = { ١ ، ٢ ، ٣ }، ص = { ٠ ، ١ } ، ل = { ٤ }، جد الآتي:

أ. س × ل ب. س × ص جـ. ل × ص

د. ل × ل هـ. (س ∩ ص) × ل و. (ل − ص) × ص

ي. (س × ل) ∪ (ص × ل)

(٤) إذا كان م = { س ، ص ، ط } ، ب = { ح ، ع ، و }

ع : م ← ب حيث: ع = {(س ، ح) ، (ص ، ع) ، (ط ، و)}

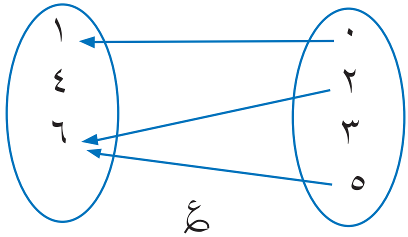
أ. ماذا تسمى م بالنسبة للعلاقة ع ؟

ب. ماذا تسمى ب بالنسبة للعلاقة ع ؟

جـ. ارسم مخططاً سهمياً يوضح ع

د. ما العلاقة بين ع ، م × ب؟

(٥) ع : {٠ ، ٢ ، ٣ ، ٥} ← { ١ ، ٤ ، ٦ } معرّفة بالمخطط السهمي التالي:



ع

أ. جد صورة كل من ٠ ، ٢ ، ٥ .

ب. هل العبارات التالية صحيحة أم خطأ:

٢ ع ٦ ، ٣ ع ٤ ، ٥ ع̸ ١ ، (٠ ، ١) ∈ ع ، (١ ، ٠) ∈ $ع^{-١}$

(٦) إذا كانت ص = {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ } ، ع : ص ← ص معرّفة كالآتي:

ع = {(٠ ، ٠) ، (١ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣)}

أ. اكتب $ع^{-١}$ في صورة مجموعة.

ب. اكتب قاعدة الاقتران لـ ع .

جـ. ما العلاقة بين ع ، $ع^{-١}$ ؟

(٧) إذا كانت: $ع_{١}$ = {(٢ ، ٠) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ١) ، (٠ ، ٠) ، (١ ، ١)}

$ع_{٢}$ = {(١ ، ١) ، (٣ ، ٢) ، (١ ، ٣)} . جد:

أ. $ع_{١} \cap ع_{٢}$

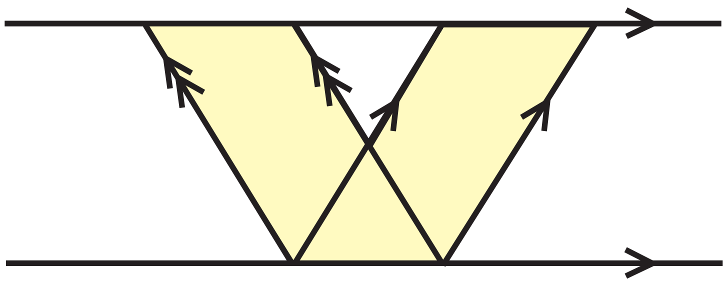
ب. مدى $ع_{١}$ ؟ و مدى $ع_{٢}$ ؟

جـ. $ع_{١} \cap ع_{٢}^{-١}$

(٨) إذا كان م = {٠ ، ٣} ، ب = {١ ، ٥} مستعيناً بالمخططات السهمية وضّح كم علاقة يمكن تعريفها من م إلى ب حيث أنّ كل عنصر في م له صورة واحدة في ب؟

الوحدة الخامسة

التكـــــــــافؤ



تمرين مراجعة

(١) جد طول ضلع مربع مساحته تساوي مساحة مثلث قاعدته ١٠سم وارتفاعه ٥سم

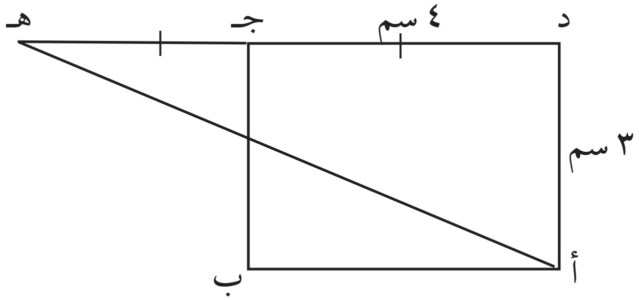
(٢) أحسب مساحة مستطيل طوله ٦سم ، وعرضه ٤سم .

(٣) أحسب مساحة متوازي أضلاع طول قاعدته ٨سم وارتفاعه ٦سم.

(٤) أحسب طول قاعدة متوازي أضلاع ارتفاعه ١٢سم ، ومساحته تساوي مساحة مستطيل طوله ١٥سم ، وعرضه ٨ سم .

(٥) في الشكل أدناه ، إذا كان أ ب جـ د مستطيل طوله ٤سم ، وعرضه ٣سم

$\overline{\text{د جـ}}$ = $\overline{\text{جـ هـ}}$.



الشكل : (١)

أحسب:

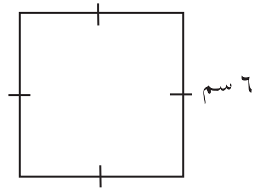
(أ) أحسب مساحة المستطيل أ ب جـ د .

(ب) أحسب مساحة المثلث أ هـ د .

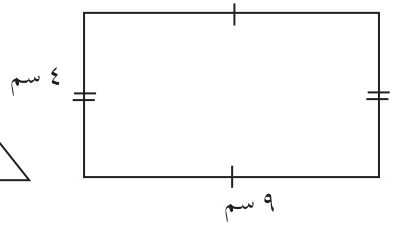
(جـ) صل $\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{ب هـ}}$. ما نوع الشكل أ ب هـ جـ ؟ أحسب مساحته .

(٥ – ١) مفهوم التكافؤ :

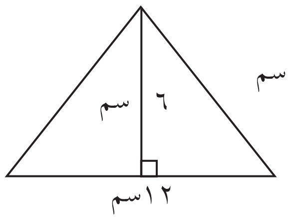
مثال (١) : احسب مساحة الأشكال الآتية :



الشكل (١)



الشكل (٢)



الشكل (٣)

الحل :

مساحة المربع في الشكل (١) = ٦ × ٦ = ٣٦ سم^{٢}

مساحة المستطيل في الشكل (٢) = ٩ × ٤ = ٣٦ سم^{٢}

مساحة المثلث في الشكل (٣) = $\frac{١٢ \times ٦}{٢}$ = ٣٦ سم^{٢}

ماذا تلاحظ في المساحات الثلاثة السابقة ؟ .

نلاحظ أن المساحات الثلاثة السابقة متساوية.

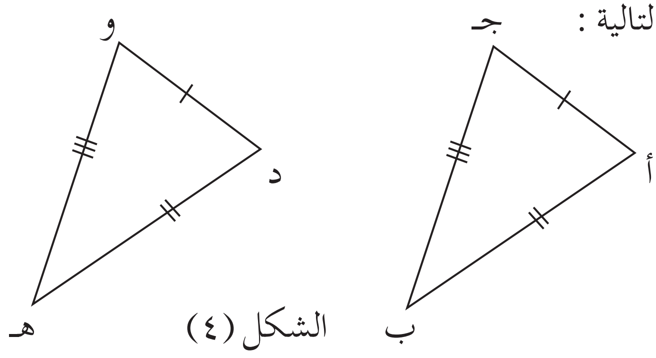
في هذه الحالة نقول أن مساحة المثلث تكافئ مساحة المستطيل تكافئ مساحة المربع.

إذن تساوى مساحات لمضلعات مختلفة يسمّى تكافؤ.

> تكافؤ مضلعين مستويين يعني تساوى مساحتيهما

مثال (٢):

من الأشكال التالية :



الشكل (٤)

– هل يتطابق المثلثان أ ب جـ ، د هـ و ؟ لماذا ؟
– هل المثلثان أ ب جـ ، د هـ و متكافآن ؟
من الأمثلة السابقة نلاحظ أنّ :

الأشكال المتطابقة جميعها متكافئة و لكن ليس من الضروري أن تكون الأشكال المتكافئة متطابقة .

تمرين (٥ – ١)

(١) احسب طول قاعدة مثلث ارتفاعه ٨ سم ، ويكافئ مربعاً طول ضلعه ٦ سم

(٢) احسب طول ضلع مربع يكافئ مستطيلاً طوله ١٨ سم ، وعرضه ٨ سم .

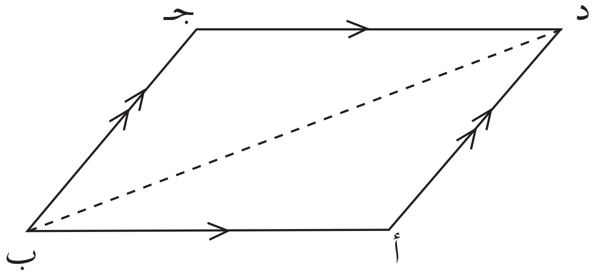
(٣) احسب نصف قطر دائرة تكافئ مستطيلاً طوله ١٤ سم ، وعرضه ١١ سم .

(٤) احسب طول ضلع مربع يكافئ متوازي أضلاع قاعدته ١٦ سم ، وارتفاعه ٤ سم .

(٥ – ٢) نظريات على التكافؤ :

نشاط :

خذ متوازي الأضلاع أ ب جـ د أدناه:



الشكل(١)

أ / صل $\overline{\text{ب د}}$ ، ماذا نسمى المستقيم $\overline{\text{ب د}}$ ؟

ب / إلى كم مثلث قَسّم القطر $\overline{\text{ب د}}$ متوازي الأضلاع أ ب جـ د ؟

جـ/ سّم هذين المثلثين. هل المثلثان متطابقان ؟

د / هل المثلثان متكافئان ؟

إذن هذان المثلثان متطابقان و بالتالي متكافئان.

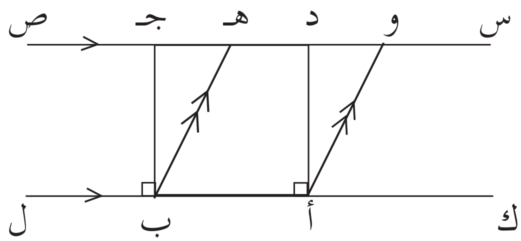
أي أن كل من المثلثين أ ب د و ب جـ د يكافئ نصف المتوازي أ ب جـ د .

وكذلك ينطبق هذا على المستطيل فإن القطر يقسمه إلى مثلثين متطابقين وكل مثلث يكافئ نصف المستطيل . و أيضاً بالنسبة للمربع و المعين .

نظرية (١):

> إذا اشترك مستطيل ومتوازي أضلاع في القاعدة ، وانحصرا بين مستقيمين متوازيين فإنهما متكافئان .

(أ) البرهان العملي :



الشكل (٢)

المعطى :

$\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ك ل}}$

أ ب جـ د مستطيل ، أ ب هـ و متوازي أضلاع .

$\overline{\text{أ ب}}$ قاعدة مشتركة .

المطلوب إثباته : المستطيل أ ب جـ د يكافئ متوازي الأضلاع أ ب هـ و

العمل و البرهان :

(١) على ورقة خارجية ارسم الشكل (٢) بدقة .

(٢) اقطع المثلث أ د و ثم اطبقه على المثلث ب جـ هـ .

(٣) هل وجدت أن الجزء المغطى بهذا المثلث مع الشكل أ ب هـ د يكونان المستطيل أ ب جـ د ؟

(أ) البرهان النظري :

في Δ ب جـ هـ ، Δ أ د و

$\overline{\text{ب جـ}}$ = $\overline{\text{أ د}}$ (ضلعان متقابلان في مستطيل)

$\overline{\text{ب هـ}}$ = $\overline{\text{أ و}}$ (ضلعان متقابلان في متوازي أضلاع)

$\measuredangle$ ب جـ هـ = $\measuredangle$ أ د و = 90°

∴ المثلثان متطابقان (وتر و ضلع في Δ قائم الزاوية)

∴ مساحة Δ ب جـ هـ = مساحة Δ أ د و

∴ مساحة المستطيل أ ب جـ د = مساحة Δ ب جـ هـ + مساحة أ ب هـ د

= مساحة Δ أ د و + مساحة أ ب هـ د

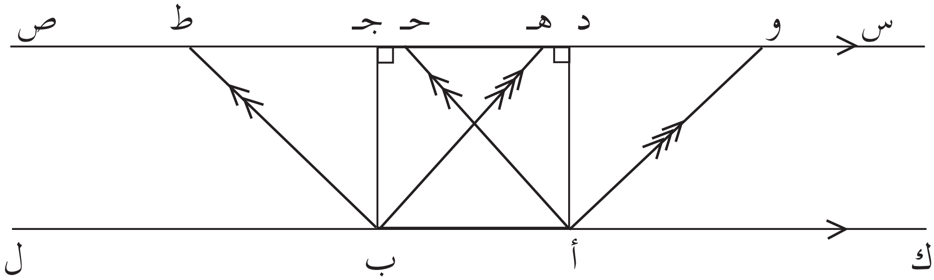
∴ مساحة المستطيل أ ب جـ د = مساحة متوازي الأضلاع أ ب ه و

∴ المستطيل أ ب جـ د يكافئ متوازي الأضلاع أ ب ه و.

نتيجة :

متوازيات الأضلاع التي لها قاعدة واحدة ، وتقع بين مستقيمين متوازيين متكافئة.

البرهان :



الشكل (٣)

متوازي الأضلاع أ ب هـ و يكافئ المستطيل أ ب جـ د (نظرية)

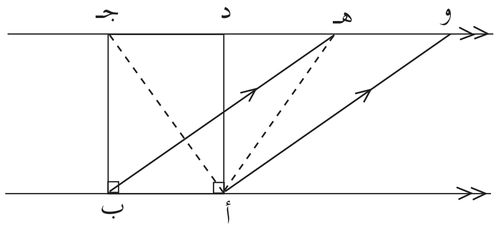
متوازي الأضلاع أ ب ط حـ يكافئ المستطيل أ ب جـ د (نظرية)

∴ متوازي الأضلاع أ ب هـ و يكافئ متوازي الأضلاع أ ب ط حـ

تمرين (٥ – ٢)

(١) في الشكل (٤) المقابل :

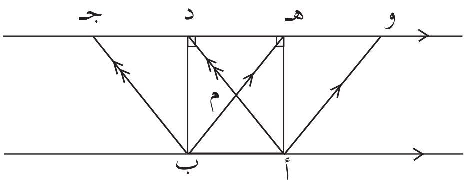
أثبت أن Δ أ ب هـ يكافئ Δ أ ب جـ



الشكل (٤)

(٢) في الشكل (٥) المقابل :

أثبت أن أ م هـ و يكافئ الشكل ب جـ د م

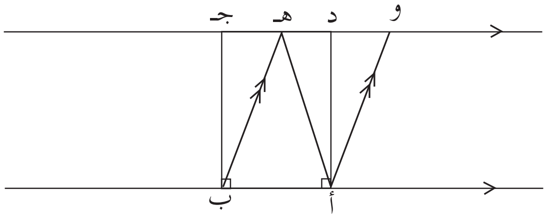


الشكل (٥)

(٣) في الشكل (٦) المقابل :

أثبت أن : Δ أ ب هـ يكافئ

$\frac{١}{٢}$ المستطيل أ ب جـ د

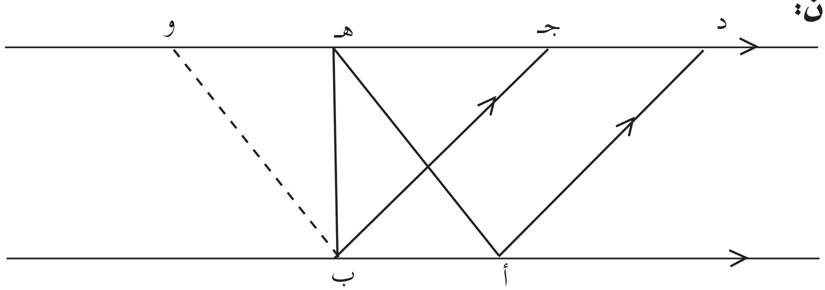


الشكل (٦)

(٥ – ٣) نظرية (٢) :

> إذا اشترك متوازي أضلاع ومثلث في القاعدة ، وانحصرا بين مستقيمين متوازيين ، فإن المثلث يكافئ نصف متوازي الأضلاع .

البرهان:



الشكل (١)

المعطى:

أ ب // د هـ ، أ ب جـ د متوازي أضلاع .

Δ أ ب هـ له قاعدة مشتركة مع متوازي الأضلاع أ ب جـ د .

المطلوب إثباته :

Δ أ ب هـ يكافئ $\frac{١}{٢}$ متوازي الأضلاع أ ب جـ د .

العمل :

ارسم ب و يوازي أ هـ و يلاقي إمتداد د هـ في و .

البرهان :

في الشكل أ ب و هـ

أ ب // هـ و (عملاً)

أهـ // ب و (عملاً)

∴ أ ب و هـ متوازي أضلاع

∴ ب هـ قطر لمتوازي الأضلاع أ ب و هـ

∴ Δ أ ب هـ يكافئ نصف متوازي الأضلاع أ ب و هـ

∴ أ ب // د و (معطى)

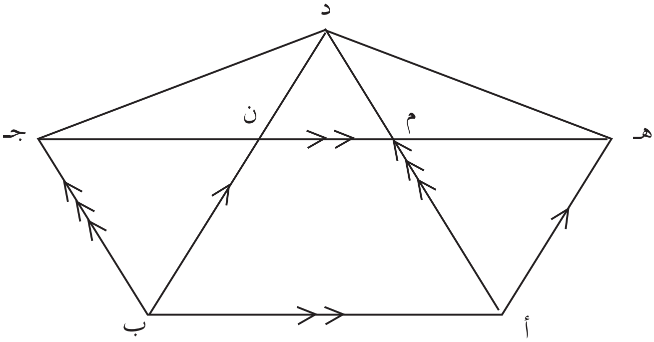
أ ب قاعدة مشتركة .

∴ متوازي الأضلاع أ ب و هـ يكافئ متوازي الأضلاع أ ب جـ د (نظرية)

Δ أ ب هـ يكافئ $\frac{١}{٢}$ متوازي الأضلاع أ ب و هـ (بالبرهان)

∴ Δ أ ب هـ يكافئ $\frac{١}{٢}$ متوازي الأضلاع أ ب جـ د

مثال : في الشكل التالي : أثبت أن Δ أ د هـ يكافئ Δ ب جـ د



الشكل (٢)

المعطيات :

أ ب // هـ جـ ، أ هـ // ب د ، أ د // ب جـ

البرهان :

أ ب // هـ جـ (معطى)

أ ب قاعدة مشتركة لمتوازيي الأضلاع أ ب جـ م ، أ ب ن هـ

∴ متوازي الأضلاع أ ب ن هـ يكافئ متوازي الأضلاع أ ب جـ م (نظرية) (١)

أ هـ // ب د (معطى)

أ هـ قاعدة مشتركة لمتوازي الأضلاع أ ب ن هـ ، و المثلث أ د هـ

∴ Δ أ د هـ يكافئ $\frac{١}{٢}$ متوازي الأضلاع أ ب ن هـ (نظرية) (٢)

أ د // ب جـ (معطى)

ب جـ قاعدة مشتركة لمتوازي الأضلاع أ ب جـ م ، و المثلث ب جـ د

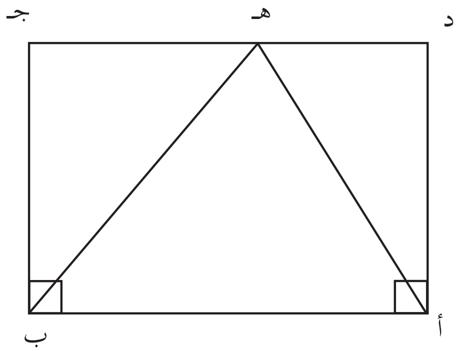
∴ Δ ب جـ د يكافئ $\frac{١}{٢}$ متوازي الأضلاع أ ب جـ م (نظرية) (٣)

من (١) و (٢) و (٣) نجد أنّ :

Δ أ د هـ يكافئ Δ ب جـ د

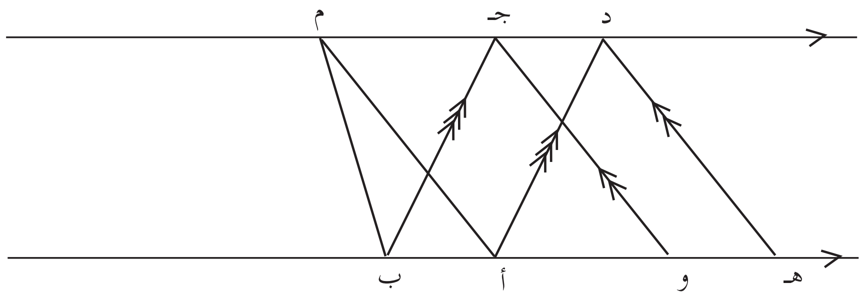
تمرين (٥ – ٣)

(١) في الشكل (٣) أ ب جـ د مستطيل أثبت أنّ Δ أ ب هـ يكافئ $\frac{١}{٢}$ المستطيل أ ب جـ د .



الشكل (٣)

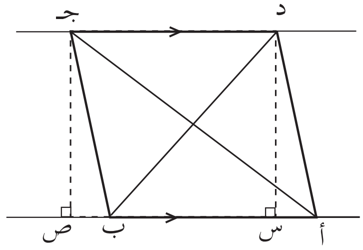
(٢) في الشكل (٤) أثبت أنّ : Δ أ ب م يكافئ $\frac{١}{٢}$ متوازي الأضلاع جـ د هـ و



الشكل (٤)

(٣) أ ب جـ د مستطيل ، رسمت النقطة هـ داخل هذا المستطيل ، أثبت أنّ :
Δ أ هـ د + Δ ب جـ هـ يكافئ $\frac{١}{٢}$ المستطيل أ ب جـ د .

(٥ – ٤) تكافؤ المثلثات :



الشكل (١)

- في شكل (١) س ص جـ د مستطيل

∴ $\overline{\text{د س}} = \overline{\text{جـ ص}}$ لماذا ؟

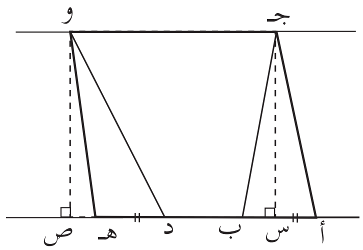
مساحة Δ أ ب د = $\frac{١}{٢} \times \overline{\text{أ ب}} \times \overline{\text{د س}}$

مساحة Δ أ ب جـ = $\frac{١}{٢} \times \overline{\text{أ ب}} \times \overline{\text{جـ ص}}$

∴ Δ أ ب د يكافئ Δ أ ب جـ

نظرية (٣) :

> إذا اشترك مثلثان في القاعدة ورأساهما على مستقيم يوازي هذه القاعدة متكافئان .



الشكل (٢)

- في شكل (٢) س ص و جـ مستطيل

∴ $\overline{\text{جـ س}} = \overline{\text{و ص}}$ لماذا ؟

مساحة Δ أ ب جـ = $\frac{١}{٢} \times \overline{\text{أ ب}} \times \overline{\text{جـ س}}$

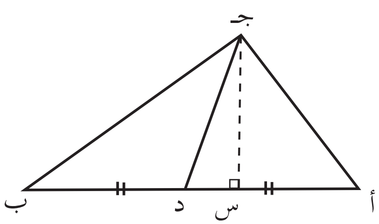
مساحة Δ د هـ و = $\frac{١}{٢} \times \overline{\text{د هـ}} \times \overline{\text{و ص}}$

∵ $\overline{\text{أ ب}} = \overline{\text{د هـ}}$ (معطى)

∴ Δ أ ب جـ يكافئ Δ د هـ و

نظرية (٤):

> المثلثات المتساوية القواعد الواقعة بين مستقيمين متوازيين متكافئة.



الشكل (٣)

- في الشكل (٣) :

مساحة Δ أ د جـ = $\frac{١}{٢} \times \overline{\text{أ د}} \times \overline{\text{جـ س}}$

مساحة Δ د ب جـ = $\frac{١}{٢} \times \overline{\text{د ب}} \times \overline{\text{جـ س}}$

∵ $\overline{\text{أ د}} = \overline{\text{د ب}}$ (معطى)

∴ Δ أ د جـ يكافئ Δ د ب جـ

نظرية (٥) :

> المستقيم الذي يصل رأس المثلث بمنتصف الضلع المقابل ، يقسّم المثلث إلى مثلثين متكافئين .

مثال (١) : من الشكل المقابل أثبت أنّ:

Δ أ ص د يكافئ Δ ب س جـ

البرهان : في الشكل أ ب ص س :

س ص // أ ب (معطى)

س ص قاعدة مشتركة

∴ Δ أ س ص يكافئ Δ ب ص س (١)

في الشكل س ص جـ د :

س ص // د جـ (معطى)

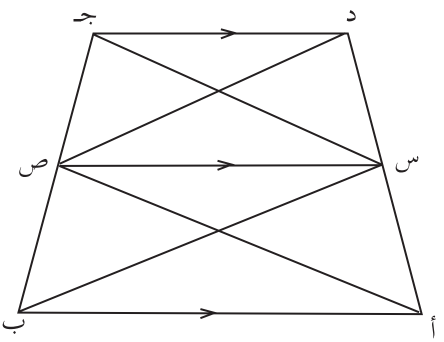
س ص قاعدة مشتركة

∴ Δ س ص د يكافئ Δ س ص جـ (٢)

بجمع (١) و (٢) :

Δ أ س ص + Δ س ص د يكافئ Δ ب ص س + Δ س ص جـ

∴ Δ أ ص د يكافئ Δ ب س جـ



الشكل (٤)

مثال (٢) : أ ب جـ د شبه منحرف فيه أ د // ب جـ ، وصل أ جـ ، ب د فتقاطعا في هـ . أثبت أنّ : Δ أ ب هـ يكافئ Δ د هـ جـ

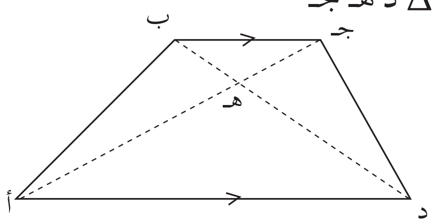
البرهان : أ د // ب جـ (معطى)

د أ قاعدة مشتركة

∴ Δ د أ ب يكافئ Δ د أ جـ

بطرح Δ د أ هـ من المثلثين نجد أنّ :

Δ أ ب هـ يكافئ Δ د هـ جـ



الشكل (٥)

تمرين (٤ – ٥)

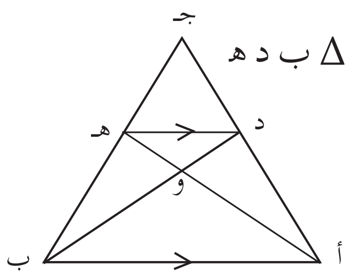
(١) أ ب جـ مثلث ، هـ منتصف الضلع أ ب ، د منتصف الضلع أ جـ

جد المثلث الذي يكافئ :

(أ) Δ أ ب د (ب) Δ جـ أ هـ (جـ) Δ ب د هـ

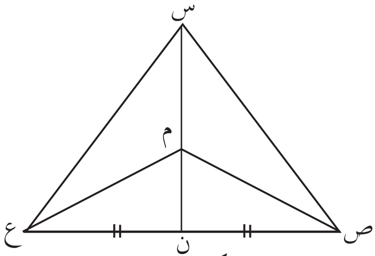
(٢) في الشكل التالي : إذا كان أ ب // د هـ

اكتب المثلثات المتكافئة .



الشكل (٦)

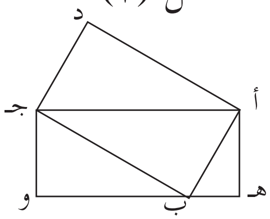
(٣) في الشكل (٧) :
إذا كان ص ن = ن ع أثبت أنّ :
Δ س ص م يكافئ Δ س ع م



الشكل (٧)

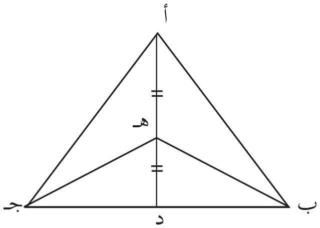
تمرين عام

(١) في الشكل التالي أثبت أنّ :
المستطيل أ ب جـ د يكافئ المستطيل أ هـ و جـ

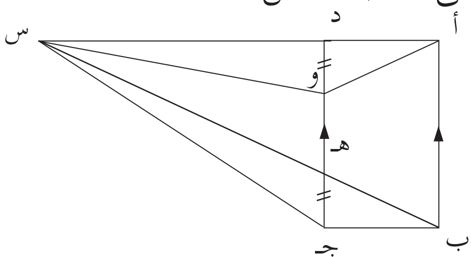


(٢) أ ب جـ مثلث ، ل نقطة على أ ب ، ك نقطة على أ جـ
حيث ل ك // ب جـ ، أثبت أنّ : Δ أ ل جـ يكافئ Δ أ ب ك

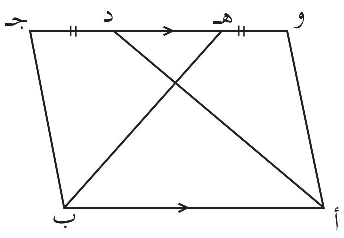
(٣) في الشكل التالي : إذا كان أ هـ = هـ د أثبت أنّ :
Δ ب جـ هـ يكافئ $\frac{١}{٢}$ Δ أ ب جـ



(٤) في الشكل أدناه أ ب // د جـ ، د و = هـ جـ
أثبت أنّ : Δ أ و س يكافئ Δ ب جـ س



(٥) في الشكل أدناه :
أ ب // و جـ ، و هـ = د جـ
أثبت أنّ : الشكل أ ب هـ و
يكافئ الشكل أ ب جـ د
(إرشاد : صل أ هـ ، ب د)



الوحدة السادسة

النظام الثنائي

الرمز	١	١١	١١١	١١١١	....
العدد	١	٢	٣	٤	....

I	I	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠

(٦ - ١) نبذة تاريخية عن الأعداد :

منذ أقدم العصور توصل الإنسان إلى استعمال رموز لبعض الأعداد ، فقد كان يستخدم رموزاً على هيأة خطوط مثل :

الرمز	١	١١	١١١	١١١١	...
العدد	١	٢	٣	٤	...

وهي طريقة صعبة وطويلة عندما يكون العدد كبيراً . فظهرت رموز أكثر اختصاراً عند الرومانيين القدماء مثل:

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠

ثم استخدم الهنود نوعاً جديداً من الرموز (الأرقام) ، أخذها عنهم العرب ، وأدخلوا عليها الصفر ليشغل خانة ، مما أعطى فوائد كبيرة في تسهيل الترقيم ، والعمليات الحسابية ، والأرقام التي انتشرت في الأقطار الإسلامية العربية الشرقية وهي : ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ...

وقد تمكن العلماء من تطوير نظام آخر لكتابة الأرقام يسمّى بالأرقام الغبارية ، نسبة لكتابتها على لوحة من الرمل ، وهي منتشرة في المغرب العربي بما في ذلك الأندلس ، ومنها دخلت إلى أوربا وسميت بالأرقام العربية وهي :

0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 .

وقد بنى العرب والمسلمون معرفتهم للأرقام الغبارية على نظرية الزاوية.

العدد	1	2	3	4	...
عدد الزوايا	١	٢	٣	٤	...

ومن ذلك نشأ ما يعرف بالنظام العشري وهو نظام أساسه ١٠ ، وأرقامه : ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ وبجانبه أنظمة عددية أخرى كالنظام الثماني الذي أساسه ٨ ، وأرقامه : ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧
وبتطور الصناعة وظهور الدوائر الكهربائية وتصميم الآلات الحاسبة والحاسب الإلكتروني ، بدأ ظهور أنظمة أخرى للترقيم منها النظام الثنائي الذي يستخدم في الحاسبات الالكترونية والذي أساسه ٢ ويستخدم الأرقام ٠ ، ١.
(يأتي في الأهمية بعد النظام العشري الذي نستخدمه في حياتنا)

لاحظ:

العملية ٢ × ٢ × ٢ تكتب باختصار على الصورة $٢^{٣}$.

العدد ٢ يسمّى الأساس ، العدد ٣ يسمّى الأس (القوة) ويشير إلى عدد مرات ضرب العدد ٢ في نفسه.

فمثلاً : ٥ × ٥ × ٥ × ٥ × ٥ × ٥ = $٥^{٦}$

١٠ × ١٠ × ١٠ × ١٠ = $١٠^{٤}$

وستعرف لاحقاً أن:

(أي عدد)^{٠} = ١ أي أن $٢^{٠}$ = ١ ، $١٠^{٠}$ = ١

أن كل عدد ينتمي للنظام العشري يمكن كتابته في صورة حاصل جمع لقوى العدد ١٠ (أساس النظام) . حيث معامل كل قوى أحد أرقام النظام العشري وتسمّى هذه الصورة المفكوك أو نشر العدد

الخانة	$١٠^{٠}$	$١٠^{١}$	$١٠^{٢}$	$١٠^{٣}$	$١٠^{٤}$	...
القيمة	١	١٠	١٠٠	١٠٠٠	١٠٠٠٠	...

فمثلاً: العدد ٢٣ يمكن كتابته في النظام العشري = ٣ × $١٠^{٠}$ + ٢ × $١٠^{١}$

٣١٥ = ٥ × $١٠^{٠}$ + ١ × $١٠^{١}$ + ٣ × $١٠^{٢}$

وكذلك العدد ٨٢٠٣ = ٣ × $١٠^{٠}$ + ٠ × $١٠^{١}$ + ٢ × $١٠^{٢}$ + ٨ × $١٠^{٣}$ =

٣ + ٢٠٠ + ٨٠٠٠ = ٨٢٠٣

تمرين : (٦ - ١)

انشر الأعداد (اكتب مفكوك)

أ / ٧٤٥ ب/ ١٠٠٦ جـ/ ٩٠٢٠٦

(٦ - ٢) النظام الثنائي :

النظام الثنائي هو نظام ترقيم بالأماكن اساسه ٢ و أرقامه ٠ ، ١ و قيم الأماكن في هذا النظام هي قوى الأساس ٢ أي $٢^{٠}$ ، $٢^{١}$ ، $٢^{٢}$ ، $٢^{٣}$ ، ... و حيث أنّ كل قوة من قوى العدد ٢ معاملها إما ٠ أو ١ فإن العدد الثنائي هو مجموع قيم الأماكن التي يظهر فيها الرقم ١ ، هذا المجموع يعطينا مباشرةً العدد العشري المكافئ لهذا العدد الثنائي .

فالعدد العشري ٠ يقابله العدد الثنائي $٠ = ٠ \times ٢^{٠}$

و العدد العشري ١ يقابله العدد الثنائي $١ = ١ \times ٢^{٠}$

و العدد العشري ٢ يقابله العدد الثنائي $١٠ = ٠ \times ٢^{٠} + ١ \times ٢^{١}$

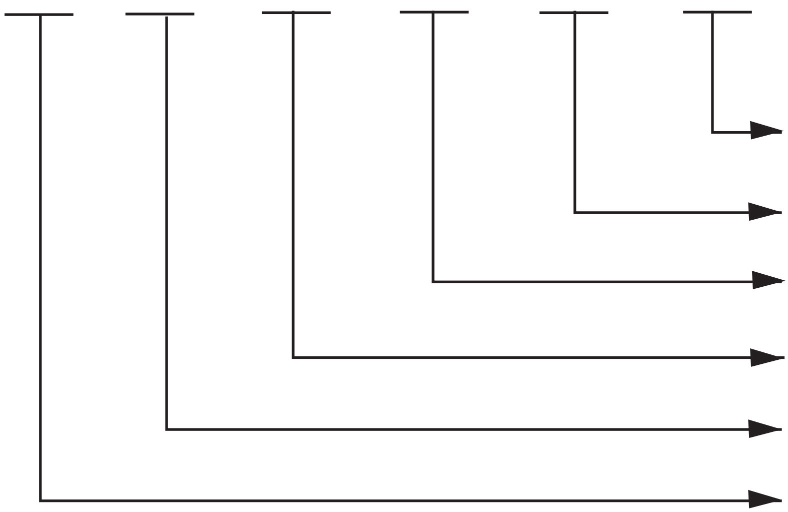
و العدد العشري ٣ يقابله العدد الثنائي $١١ = ١ \times ٢^{٠} + ١ \times ٢^{١}$

و العدد العشري ٤ يقابله العدد الثنائي $١٠٠ = ٠ \times ٢^{٠} + ٠ \times ٢^{١} + ١ \times ٢^{٢}$

و العدد العشري ٥ يقابله العدد الثنائي $١٠١ = ١ \times ٢^{٠} + ٠ \times ٢^{١} + ١ \times ٢^{٢}$

و هكذا ،،

نلاحظ إن ترقيم الأماكن في النظام الثنائي يُمثّل بقوى العدد ٢ كما يوضحها الشكل التالي :



$١ = ٢^{٠}$

$٢ = ٢^{١}$

$٤ = ٢^{٢}$

$٨ = ٢^{٣}$

$١٦ = ٢^{٤}$

$٣٢ = ٢^{٥}$

الجدول التالي يوضح التمثيل الثنائي للأعداد العشرية من ٠ إلى ١٠ :

العدد العشري	العدد الثنائي			
	$٢^{٠}$	$٢^{١}$	$٢^{٢}$	$٢^{٣}$
٠	٠			
١	١			
٢	٠	١		
٣	١	١		
٤	٠	٠	١	
٥	١	٠	١	
٦	٠	١	١	
٧	١	١	١	
٨	٠	٠	٠	١
٩	١	٠	٠	١
١٠	٠	١	٠	١

العدد الثنائي ١١٠١١ في النظام الثنائي يقرأ :
(واحد ، واحد ، صفر ، واحد ، واحد) للأساس ٢ ويكتب

$$(١١٠١١)_{٢} = ١ \times ٢^{٠} + ١ \times ٢^{١} + ٠ \times ٢^{٢} + ١ \times ٢^{٣} + ١ \times ٢^{٤}$$

$$= ١ + ٢ + ٨ + ١٦ = ٢٧$$

مثال : حوّل الأعداد الثنائية التالية إلى النظام العشري :

(أ) $(١١١٠١٠)_{٢}$ (ب) $(١٠١١٠)_{٢}$

الحل :

(أ) $(١١١٠١٠)_{٢}$ =

$٠ \times ٢^{٠} + ١ \times ٢^{١} + ٠ \times ٢^{٢} + ١ \times ٢^{٣} + ١ \times ٢^{٤} + ١ \times ٢^{٥}$

$= ٢ + ٨ + ١٦ + ٣٢ = ٥٨$

(ب) $(١٠١١٠)_{٢}$ =

$٠ \times ٢^{٠} + ١ \times ٢^{١} + ١ \times ٢^{٢} + ٠ \times ٢^{٣} + ١ \times ٢^{٤}$

$= ٢ + ٤ + ١٦ = ٢٢$

وبهذه الطريقة يمكن تحويل العدد الثنائي إلى العدد المكافىء له في النظام العشري .

تمرين :(٦ - ٢)

(١) جد مفكوك ما يأتي في صورة قوى للعدد ٢ :

(أ) $(١٠١١)_{٢}$ (ب) $(١١٠٠١١)_{٢}$ (جـ) $(١١١٠٠)_{٢}$

(٢) حول ما يأتي للنظام العشري :

(أ) $(١٠١)_{٢}$ (ب) $(١١١)_{٢}$ (جـ) $(١٠٠٠١)_{٢}$

(د) $(١٠١٠١)_{٢}$ (هـ) $(١١٠٠١)_{٢}$ (و) $(١١٠١٠١)_{٢}$

(٦ - ٣) تحويل العدد العشري إلى ثنائي:

آلية التحويل من النظام العشري إلى النظام الثنائي تقوم على تقسيم العدد بشكل متكرر على ٢ (الباقي إما ٠ أو ١) وتسجيل الباقي في كل عملية إلى أن يصبح ناتج القسمة صفر . ثم نأخذ البواقي متتابعة حسب ظهورها ، وتكتب من اليمين إلى اليسار لتعطينا المكافئ الثنائي .

فمثلاً العدد ١٣:

١٣ ÷ ٢ = ٦ والباقي ١
٦ ÷ ٢ = ٣ والباقي ٠
٣ ÷ ٢ = ١ والباقي ١
١ ÷ ٢ = ٠ والباقي ١

$١٣ = (١١٠١)_{٢}$

ويمكن اختصار الخطوات السابقة كالآتي :

الباقي	العدد	القسمة
	١٣	٢
١	٦	٢
٠	٣	٢
١	١	٢
١	٠	

$١٣ = (١١٠١)_{٢}$

ملحوظة:

للتحقق من الإجابة يمكن استخدام نشر العدد وتحويله إلى الصورة العشرية

$(١١٠١)_{٢} = ١ \times ٢^{٠} + ٠ \times ٢^{١} + ١ \times ٢^{٢} + ١ \times ٢^{٣}$

$= ١ + ٠ + ٤ + ٨ = ١٣$

مثال (١) : جد المكافئ الثنائي للعدد العشري ٨٣ ثم تحقق من إجابتك

الحل :

الباقي	العدد	القسمة
	٨٣	٢
١	٤١	٢
١	٢٠	٢
٠	١٠	٢
٠	٥	٢
١	٢	٢
٠	١	٢
١	٠	

∴ المكافئ الثنائي للعدد العشري $٨٣ = (١٠١٠٠١١)_{٢}$

للتحقق :

$$(١٠١٠٠١١)_{٢} = ١ \times ٢^{٠} + ١ \times ٢^{١} + ٠ \times ٢^{٢} + ٠ \times ٢^{٣} + ١ \times ٢^{٤} + ٠ \times ٢^{٥} + ١ \times ٢^{٦}$$

$$= ١ + ٢ + ٠ + ٠ + ١٦ + ٠ + ٦٤ = ٨٣$$

مثال (٢):

جد المكافئ الثنائي للعدد ١٠٩

الباقي	العدد	القسمة
	١٠٩	٢
١	٥٤	٢
٠	٢٧	٢
١	١٣	٢
١	٦	٢
٠	٣	٢
١	١	٢
١	٠	

$$١٠٩ = (١١٠١١٠١)_{٢}$$

هنالك طريقة أخرى للتحقق أو لتحويل العدد الثنائي إلى الصورة العشرية بإتباع الخطواط التالية :

أ / ضاعف أول رقم أقصى اليسار ثم اجمعه للرقم التالي .
ب / ضاعف ناتج الجمع وضعه تحت الرقم التالي ثم أجمع .
جـ / كرر الخطوة الثانية حتى الرقم الأخير أقصى اليمين فيكون ناتج الجمع الأخير هو العدد العشري المكافئ .

فمثلاً : $(١٠١٠٠١١)_{٢}$

١	٠	١	٠	٠	١	١
	٢	٤	١٠	٢٠	٤٠	٨٢
	٢	٥	١٠	٢٠	٤١	٨٣

العدد العشري المكافئ

تمرين : (٦ - ٣)

جد المكافئ الثنائي لكل من الأعداد التالية وتحقق من إجابتك في كل مرة .

أ / ٦٣ ب/ ٧٧ جـ/ ٩٩ د/ ١٢٨ .

(٦ - ٤) جمع الأعداد الثنائية :

نعلم أنه في جمع الأعداد على النظام العشري نجمع الأرقام في خانة الآحاد (أول عمود أقصى اليمين) ، فإذا زاد الجمع على ٩ يرحل رقم العشرات إلى العمود التالي وتكرر عملية الترحيل في الأعمدة الأخرى إذا زاد ناتج الجمع عن ٩ هذا النظام يصلح لجمع الأعداد الثنائية ولكن بمراعاة القواعد التالية :

٠ + ٠ = ٠
١ + ١ = ٠ ويرحل ١

٠ + ١ = ١
١ + ١ + ١ = ١ ويرحل ١

١ + ٠ = ١

مثال (١) : جد ناتج

$$(١١١)_٢ + (١٠١)_٢$$

الحل :

١	١	١		
	١	١	١	
	١	٠	١	+
١	١	٠	٠	

$$\therefore \quad (١١١)_٢ + (١٠١)_٢ = (١١٠٠)_٢$$

مثال (٢): جد ناتج

$$(١١٠٠١١١٠١)_٢ + (١٠١١٠١١١)_٢$$

الحل :

١	١		١	١	١	١	١	١		
	١	١	٠	٠	١	١	١	٠	١	
		١	٠	١	١	٠	١	١	١	+
١	٠	٠	١	٠	١	٠	١	٠	٠	=

$$(١١٠٠١١١٠١)_٢ + (١٠١١٠١١١)_٢ = (١٠٠١٠١٠١٠٠)_٢$$

مثال (٣): جد ناتج

$$(١٠١١)_٢ + (١١٠)_٢ + (١١٠١)_٢ + (١٠٠١)_٢$$

الحل :

العدد الأول		١٠١١
العدد الثاني	+	١١٠
		١٠٠٠١
العدد الثالث	+	١١٠١
		١١١١٠
العدد الرابع	+	١٠٠١
		١٠٠١١١

تمرين (٦ - ٤)

جد حاصل جمع الأعداد التالية :

(١) $(١٠١)_٢ + (١٠١٠)_٢$

(٢) $(١١٠١١)_٢ + (١٠١٠١)_٢$

(٣) $(١٠٠١)_٢ + (١٠١١)_٢ + (١١١٠)_٢$

(٤) $(١٠١١٠)_٢ + (١٠٠١١)_٢$

(٥) $(١١٠٠١)_٢ + (١٠١١٠١)_٢ + (١٠٠١١١)_٢$

(٦) $(١١٠١١١٠١)_٢ + (١١١٠٠١٠١)_٢$

(٦ - ٤) : طرح الأعداد الثنائية :

في الطرح الثنائي نستخدم نفس خطوات الطرح في النظام العشري ، فعندما نستلف ١ من العمود التالي يسار الصفر فإن القيمة المستلفة هي ٢ بدلاً عن ١٠ في النظام العشري ، وطرح ١ من العدد المستلف منه فمثلاً :

```
   ١   ٠^٢
−  ٠   ١
 ─────────
   ٠   ١
```

نستلف ١ يسار الصفر قيمته (٢)
ويصبح مكان الصفر (٢) ومكان الواحد (٠)

وتصبح حقائق الطرح كما يلي:

٠ − ٠ = ٠ ، ١ − ٠ = ١

١ − ١ = ٠ ، ٠ − ١ = ١ مع استلاف ١ من العمود التالي

مثال (١) : جد $(١١١٠١)_{٢}$ − $(١٠١١)_{٢}$

الحل :

```
   ١ ١ ١ ٠ ١
−    ١ ٠ ١ ١
 ───────────
=  ١ ٠ ٠ ١ ٠
```

وللتحقق نجد أنّ : $(١٠٠١٠)_{٢}$ + $(١٠١١)_{٢}$ = $(١١١٠١)_{٢}$

مثال (٢) :

جد قيمة $(١١١٠١٠١١)_{٢}$ − $(١١٠١١٠٠١)_{٢}$

الحل :

```
   ١ ١ ١ ٠ ١ ٠ ١ ١
−  ١ ١ ٠ ١ ١ ٠ ٠ ١
 ─────────────────
   ٠ ٠ ٠ ١ ٠ ٠ ١ ٠
```

وللتحقق نجد أنّ : $(١٠٠١٠)_{٢}$ + $(١١٠١١٠٠١)_{٢}$ = $(١١١٠١٠١١)_{٢}$

مثال (٣): جد قيمة

$$(١١٠١١١٠١)_{٢} + (١١١٠١٠)_{٢} - (١١٠١٠١١)_{٢}$$

الحل :

$$\begin{array}{rr}
 & ١١٠١١١٠١ \\
+ & ١١١٠١٠ \\
\hline
 & ١٠١٠٠١١١ \\
- & ١١٠١٠١١ \\
\hline
 & ٠٠١١١١٠٠
\end{array}$$

تمرين : (٦ ـ ٥)

جد ناتج ما يأتي :

(١) $(١١٠٠١١٠)_{٢} - (١١١٠١)_{٢}$

(٢) $(١١٠١٠١١)_{٢} - (١٠٠١١٠)_{٢}$

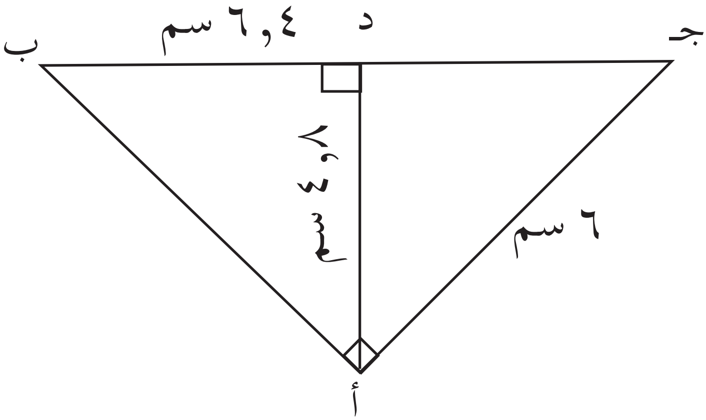
(٣) $(١٠١١١٠١٠)_{٢} - (١١١٠٠٠١)_{٢}$

(٤) $(١٠١٠١١)_{٢} + (١٠١١١٠)_{٢} - (١٠٠٠١١)_{٢}$

(٥) $(١٠١١١٠١٠١١٠)_{٢} - (١٠١٠١١٠٠٠١)_{٢}$

الوحدة السابعة

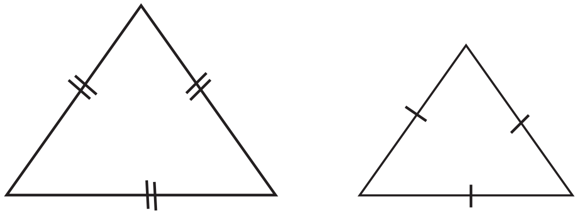
التشابه



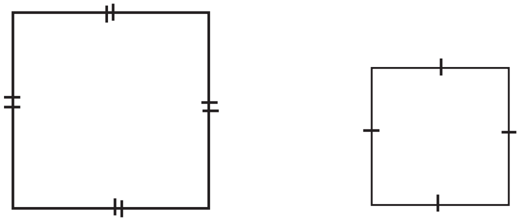
(٧ – ١) مفهوم التشابه :

انظر لكل زوج من الأشكال الهندسية التالية . ماذا تلاحظ ؟

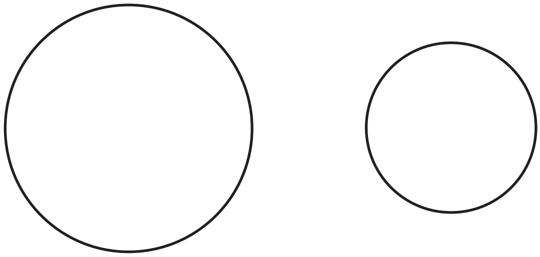
(أ)



(ب)



(جـ)



نلاحظ الآتي :

(أ) المثلثان متساويا الأضلاع متشابهان .

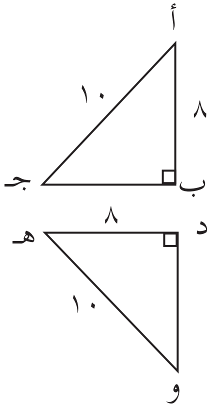
(ب) المربعان متشابهان .

(جـ) الدائرتان متشابهتان .

و بصورة عامة التشابه في الهندسة ذو علاقة بالتكبير أو التصغير للشكل . و رغم أنّ الأشكال الهندسية المستوية قد تكون متشابهة إلا اننا سنقتصر دراستنا على تشابه المثلثات في هذا الكتاب .

(٧ – ٢) تشابه المثلثات :

(أ) تشابه المثلثات بتساوي الزوايا :



الشكل (١)

في الشكل (١) :

– هل المثلثان متطابقان ؟ لماذا ؟

– اذكر أزواج الأضلاع المتناظرة .

– اذكر أزواج الزوايا المتناظرة .

– هل المثلثان متشابهان ؟

نشاط (١) :

(١) أرسم Δ أ ب جـ الذي فيه $\overline{\text{أ ب}}$ = ٥ سم ، ∢ أ = ٤٥° ، ∢ ب = ٦٥°
قس ∢ جـ .

(٢) أرسم Δ د هـ و الذي فيه $\overline{\text{د هـ}}$ = ٣ سم ، ∢ د = ٤٥° ،
∢ هـ = ٦٥° ، قس ∢ و .

– اذكر أزواج الزوايا المتناظرة .

– ماذا تلاحظ عن الزوايا المتناظرة .

– هل المثلثان متشابهان ؟

– هل المثلثان متطابقان ؟

مما سبق نلاحظ الآتي :

> يتشابه المثلثان إذا كانت الزوايا المتناظرة فيهما متساوية

– قس أضلاع المثلثين .

– ما هي أزواج الأضلاع المتناظرة ؟

– جد النسب الآتية :

$\frac{\overline{\text{أ ب}}}{\overline{\text{د هـ}}}$ ، $\frac{\overline{\text{ب جـ}}}{\overline{\text{هـ و}}}$ ، $\frac{\overline{\text{جـ أ}}}{\overline{\text{و د}}}$

– ماذا تلاحظ عن النسب التي تحصلت عليها ؟

إذا كان رسمك دقيقاً فستجد أنّ النسب الثلاث متساوية .

المثلثات المتشابه أضلاعها المتناظرة متناسبة

نلاحظ من النشاط (١) أنّ تساوي الزوايا المتناظرة يستوجب تناسب الأضلاع المتناظرة

(ب) تشابه المثلثات بتناسب الأضلاع :

نشاط (٢) :

(١) أرسم Δ أ ب جـ الذي فيه $\overline{\text{أ ب}}$ = ٥ سم ، $\overline{\text{ب جـ}}$ = ٤ سم ، $\overline{\text{جـ أ}}$ = ٦ سم .

(٢) أرسم Δ د هـ و الذي فيه $\overline{\text{د هـ}}$ = ٤ سم ، $\overline{\text{هـ و}}$ = ٣٫٢ سم ، $\overline{\text{و د}}$ = ٤٫٨ سم .

– جد النسب الآتية :

$$\frac{\overline{\text{أ ب}}}{\overline{\text{د هـ}}} \qquad \frac{\overline{\text{ب جـ}}}{\overline{\text{هـ و}}} \qquad \frac{\overline{\text{جـ أ}}}{\overline{\text{و د}}}$$

– ماذا تلاحظ ؟

– قس زوايا المثلثين . ماذا تلاحظ عن الزوايا المتناظرة ؟

– هل المثلثان متشابهان ؟

إذا تناسب أضلاع مثلثين فإنهما يتشابهان .

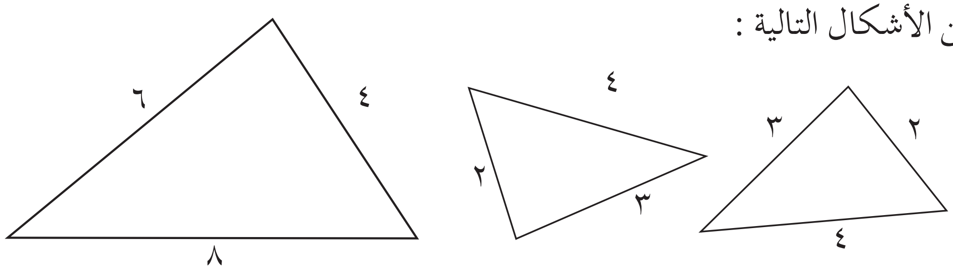
نلاحظ من النشاط (٢) أنّ تناسب الأضلاع المتناظرة في المثلثين يستوجب تساوي الزوايا المتناظرة فيهما

نستنتج من النشاطين (١) و (٢) الآتي :

لكي يتشابه مثلثان إما أن تكون الزوايا المتناظرة متساوية ،
أو الاضلاع المتناظرة متناسبة .

نشاط (٣) :

من الأشكال التالية :



(أ)   (ب)   (جـ)

الشكل (٢)

- هل يتطابق المثلثان (أ) ، (ب) ؟ لماذا ؟
- هل يتشابه المثلثان (أ) ، (ب) ؟ لماذا ؟

كل مثلثين متطابقين متشابهان .

- هل يتشابه المثلثان (ب) ، (جـ) ؟ لماذا ؟
- هل يتطابق المثلثان (ب) ، (جـ) ؟ لماذا ؟

ليس كل مثلثين متشابهين متطابقان .

مثال :

في Δ أ ب جـ بالشكل (٣)

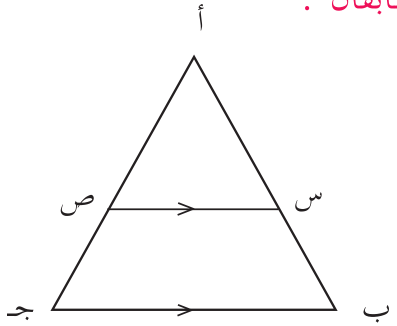
إذا كان س ص // ب جـ

أ ب = ١٠ سم ، أ ص = ٧ سم

ب جـ = ٨ سم ، س ص = ٦ سم

(١) أثبت أنّ : Δ أ ب جـ ، Δ أ س ص متشابهان .

(٢) جد أطوال (١) أ س (٢) أ جـ



الشكل (٣)

الحل : (أ) Δ أ ب جـ ، Δ أ س ص

س ص // ب جـ (معطى)

∢ أ ب جـ = ∢ أ س ص (بالتناظر)

∢ أ جـ ب = ∢ أ ص س (بالتناظر)

$\measuredangle$ ب أ جـ = $\measuredangle$ س أ ص (مشتركة)

$\therefore$ المثلثان متشابهان (الزوايا المتناظرة متساوية)

(ب) بما أنّ المثلثين متشابهان :

$$\therefore \frac{\overline{أس}}{\overline{أب}} \quad \frac{\overline{أص}}{\overline{أجـ}} \quad \frac{\overline{س ص}}{\overline{ب جـ}}$$

(١) $\because \frac{\overline{أس}}{١٠} = \frac{٦}{٨}$

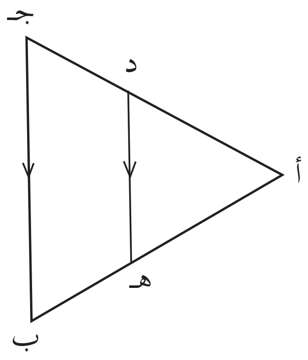
$$\therefore \overline{أس} = \frac{٦ \times ١٠}{٨} = ٧\frac{١}{٢} \text{ سم}$$

(٢) بما أنّ : $\frac{\overline{أجـ}}{\overline{أص}} = \frac{٨}{٦}$

$$\therefore \frac{\overline{أجـ}}{٧} = \frac{٨}{٦}$$

$$\therefore \overline{أجـ} = \frac{٧ \times ٨}{٦} = ٩\frac{١}{٢} \text{ سم}$$

تمرين (٧ – ١)



الشكل (٤)

(١) إذا كان $\overline{هـ د} \parallel \overline{ب جـ}$ ،

$\overline{د هـ}$ = ٥ سم ، $\overline{أ د}$ = ٦ سم

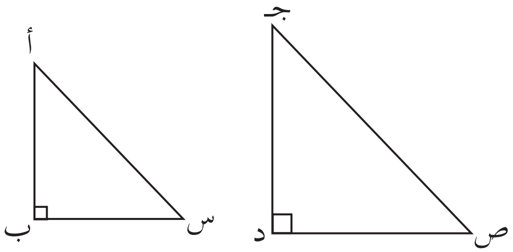
$\overline{أ ب}$ = ١٠ سم ، $\overline{ب جـ}$ = ٨ سم

– سم المثلثين المتشابهين .

– جد طول (أ) $\overline{أ هـ}$

(ب) $\overline{أ جـ}$

(٢) في الشكل (٥):
أب ، جـ د عمودان
ب س ، د ص ظلا العمودين
في اللحظة نفسها
ماذا يمثل أ س ، جـ ص

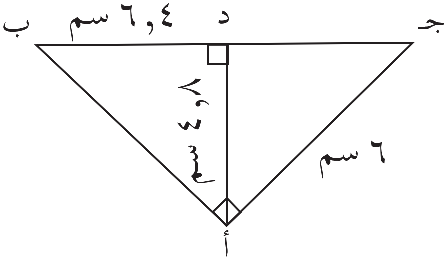


الشكل (٥)

(أ) أثبت أنّ المثلثين متشابهان .

(ب) إذا كان العمود أ ب = ١,٢ متر ، جـ د = ١,٥ متر ، و طول ظل العمود أ ب = ٣ أمتار ، جد طول ظل العمود جـ د .

(٣) في الشكل (٦) المقابل



الشكل (٦)

∢ جـ أ ب = ∢ أ د ب = ٩٠°

أثبت أنّ : Δ أ ب جـ ، Δ د ب أ متشابهان .

إذا كان أ جـ = ٦ سم ، أ د = ٤,٨ سم

ب د = ٦,٤ سم ، جد طول أ ب .

(٧ – ٣) تشابه المثلثات بتناسب ضلعين و تساوي الزاوية المحصورة بينهما :

نشاط :

(١) أرسم Δ أ ب جـ الذي فيه $\overline{\text{أ ب}}$ = ٦ سم ، $\overline{\text{ب جـ}}$ = ٤,٥ سم ،
$\measuredangle$ أ ب جـ = ٥٠° .

(٢) أرسم Δ د هـ و الذي فيه $\overline{\text{د هـ}}$ = ٨ سم ، $\overline{\text{هـ و}}$ = ٦ سم ، $\measuredangle$ د هـ و = ٥٠°.

ماذا تلاحظ من النسبتين ؟

$$\frac{\overline{\text{أ ب}}}{\overline{\text{د هـ}}} \quad ، \quad \frac{\overline{\text{ب جـ}}}{\overline{\text{هـ و}}}$$

قس طول $\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{د و}}$ ثم جد النسبة $\frac{\overline{\text{أ جـ}}}{\overline{\text{د و}}}$

ماذا تلاحظ ؟

لابد أنك لاحظت أن : $\frac{\overline{\text{أ ب}}}{\overline{\text{د هـ}}} = \frac{\overline{\text{ب جـ}}}{\overline{\text{هـ و}}} = \frac{\overline{\text{أ جـ}}}{\overline{\text{د و}}}$

∴ الأضلاع المتناظرة في المثلثين متناسبة .

∴ المثلثان متشابهان .

قس $\measuredangle$ ب جـ أ ، $\measuredangle$ هـ و د

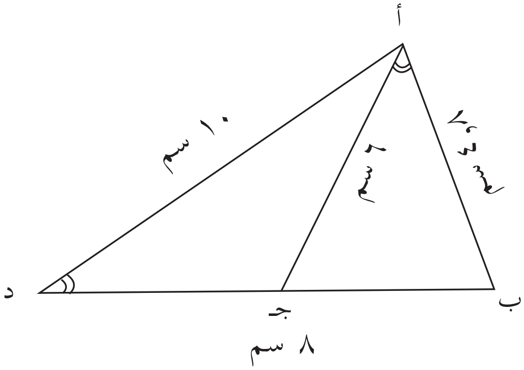
$\measuredangle$ ب أ جـ ، $\measuredangle$ هـ د و

ماذا تلاحظ عن الزوايا المتناظرة في المثلثين ؟

∴ المثلثان متشابهان .

> يتشابه المثلثان إذا ساوت زاوية في أحدهما زاوية في المثلث الآخر و تناسب الضلعان اللذان يحصران الزاوية مع نظيريهما في المثلث الآخر .

مثال:



الشكل (١)

في الشكل أدناهـ :

$\overline{\text{أ ب}}$ = ٤,٨ سم ، $\overline{\text{ب د}}$ = ٨ سم

$\overline{\text{أ جـ}}$ = ٦ سم ، $\overline{\text{أ د}}$ = ١٠ سم

∢ ب أ جـ = ∢ ب د أ

أثبت أنّ :

Δ أ ب د ، Δ جـ ب أ متشابهان .

ثم جد طول $\overline{\text{ب جـ}}$.

البرهان :

في Δ أ ب د ، Δ جـ ب أ

∢ ب أ جـ = ∢ ب د أ (معطى)

$$\frac{\overline{\text{أ جـ}}}{\overline{\text{أ د}}} = \frac{٦}{١٠} = \frac{٣}{٥}$$

$$\frac{\overline{\text{ب أ}}}{\overline{\text{ب د}}} = \frac{٤,٨}{٨} = \frac{٤٨}{٨٠} = \frac{٣}{٥}$$

$$\therefore \frac{\overline{\text{أ جـ}}}{\overline{\text{أ د}}} = \frac{\overline{\text{ب أ}}}{\overline{\text{ب د}}}$$

∴ المثلثان متشابهان .

$$\therefore \frac{\overline{\text{ب جـ}}}{\overline{\text{أ ب}}} = \frac{\overline{\text{أ جـ}}}{\overline{\text{أ د}}} = \frac{\overline{\text{ب أ}}}{\overline{\text{ب د}}}$$

$$\therefore \frac{\overline{\text{ب جـ}}}{٤,٨} = \frac{٦}{١٠}$$

$$\therefore \overline{\text{ب جـ}} = \frac{٤,٨ \times ٦}{١٠} = ٢,٨٨ \text{ سم}$$

حاول إثبات تشابه المثلثين مستخدماً تساوي الزوايا .

تمرين (٧ – ٢)

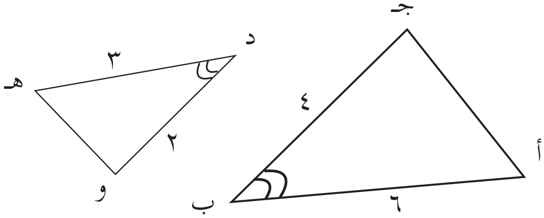
(١) في الشكل (٢) التالي :

هل المثلثان متشابهان ؟ لماذا ؟

∠ أ جـ ب = ∠ ....

∠ ب أ جـ = ∠ ....

جد قيمة هـ و / أ جـ



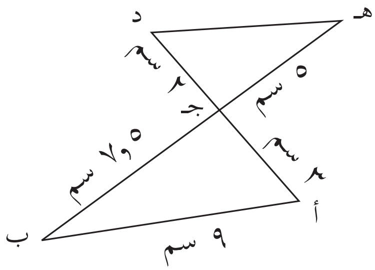
الشكل (٢)

(٢) في الشكل (٣) التالي :

أثبت أنّ :

∆ أ ب جـ ، ∆ د هـ جـ متشابهان .

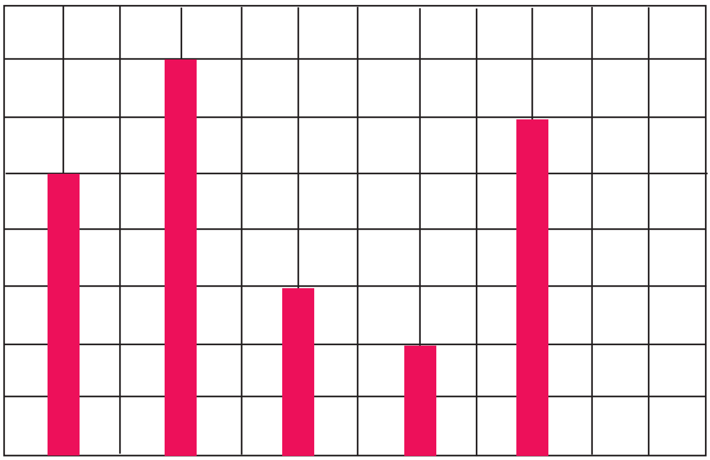
و إذا كان أ ب = ٩ سم جد طول هـ د .



الشكل (٣)

الوحدة الثامنة

الإحصـــــاء



تمهيد:

إنّ استخدامات الإحصاء كثيرة، منها دراسة المجتمع ودراسة الطبيعة كما أنها تستخدم بفعالية في مجال الصحة والصناعة والتجارة وإدارة الاعمال والزراعة والعلوم التجريبية.

إنّ علم الإحصاء يرتبط بتطوير طرائق وأساليب جمع البيانات وتنظيمها وتحليلها وتفسيرها بطريقة يمكن معها التنبؤ بالمستقبل مما يمكّن من درء خطر أو جلب مصلحة.

(٨ – ١) البيانات الإحصائية

- كم عدد أفراد كل أسرة في قريتك؟
- ما الدرجات التي تحصّل عليها تلاميذ صفّك في امتحان الرياضيات الأخير؟
- كم عدد سكان ولاية وسط دارفور؟
- كم عدد الوفيات بحيك خلال هذا العام؟

إنّ الإجابة عن أسئلة من هذا النوع تتطلب البحث عن معلومات تجمع عن الموضوع الذي يتضمنه السؤال وهذه المعلومات التي تجمع عن موضوع محدد تسمى البيانات الإحصائية. وكل واحدة من هذه البيانات تسمى مفردة.

إنّ علم الإحصاء يعني بجمع البيانات وعرضها بطرق مختلفة، ومن ثم استخلاص النتائج.

ويتم الحصول على البيانات الإحصائية بعد تحديد الموضوع المراد دراسته بطرق مختلفة، فقد تجمع البيانات المطلوبة كاملة من مصدرها إذا كانت بسيطة ومحدودة أو بأخذ عينة من الموضوع إذا كانت البيانات كثيرة جداً والذي يعرّف بالمجتمع الاحصائي وجمع البيانات من العينة .

وقد نحصل على البيانات الإحصائية أيضاً من التجارب العلمية المختلفة التي تجرى للحصول على معلومات معينة.

وهنالك أدوات لجمع البيانات الإحصائية ومنها:

١) الاستبانة .

٢) السجلات الرسمية.

٣) المقابلات الفردية والجماعية.

٤) الاختبارات .

٥) الملاحظات .

ويراعى عند جمع المعلومات الصدق والسرعة وقلة التكلفة.

وفيما يلي أمثلة لبيانات إحصائية جمعت عن الموضوعات التالية:

١) مرضى مستشفى الكاب المصابين بالملاريا خلال العام ٢٠٢٠م.

٢) ممتحني الشهادة الثانوية بمدرسة الفداء الثانوية خلال الأعوام ٢٠١٥م، ٢٠١٦م، ٢٠١٧م، ٢٠١٨م، ٢٠١٩م.

٣) متوسط عدد المواليد بإحدى القرى خلال الأسبوع الأول من شهر مايو للعام ٢٠٢١م.

والبيانات هي:

١) عدد مرضى مستشفى الكاب المصابين بالملاريا خلال العام ٢٠٢٠م.

الشهر	عدد المصابين	الشهر	عدد المصابين	الشهر	عدد المصابين
يناير	٣٢	مايو	١١	سبتمبر	٦٢
فبراير	٥٤	يونيو	٠٧	أكتوبر	٣٧
مارس	٢٧	يوليو	٢٣	نوفمبر	٢٥
ابريل	١٦	أغسطس	٤٥	ديسمبر	٠٩

٢) ممتحني الشهادة الثانوية بمدرسة الفداء الثانوية خلال الأعوام ٢٠١٥م، ٢٠١٦م، ٢٠١٧م، ٢٠١٨م، ٢٠١٩م.

العام	٢٠١٥م	٢٠١٦م	٢٠١٧م	٢٠١٨م	٢٠١٩م
عدد الممتحنين	٧٦	٦٩	٨٢	٦٣	٥٥

٣) متوسط عدد المواليد بإحدى القرى خلال الأسبوع الأول من شهر مايو للعام ٢٠٢١م.

اليوم	السبت	الأحد	الاثنين	الثلاثاء	الأربعاء	الخميس	الجمعة
متوسط عدد المواليد	١٣	٢٥	١٧	١٩	١٢	٢١	٨

تمرين (٨ – ١)

١) اختر موقعاً يمكن الوصول إليه كالمدرسة التي أنت بها أو مدرسة مجاورة أو المركز الصحي أو مصنع قريب أو غيره وحدد موضوعاً معيناً ثم قم بجمع البيانات عنه.

٢) مستخدماً الانترنت اكتب عدد الإصابات الشهرية لمرض الكرونا (COVED - 19) في ولايتك للعام ٢٠٢٠م.

(٨ – ٢) عرض البيانات واستخلاص النتائج

افترض أن البيانات التالية تمثل درجات تلاميذ صفك في امتحان العلوم حيث كانت الدرجة القصوى له ٥٠ درجة وأن الدرجات كانت:

٣٠	١٠	٢٠	١٠	٥٠	٤٠	٢٠	٣٠	١٠	٢٠
٤٠	٥٠	١٠	٣٠	٤٠	١٠	٢٠	٣٠	٢٠	١٠
٥٠	٢٠	٤٠	١٠	٢٠	٥٠	٤٠	١٠	٣٠	٥٠
٣٠	١٠	٥٠	٣٠	٢٠	٤٠	٣٠	٢٠	٤٠	١٠

جدول (١)

١) كم عدد التلاميذ الذين أحرزوا ٢٠ درجة؟

٢) كم عدد التلاميذ الذين أحرزوا ٥٠ درجة؟

٣) كم عدد التلاميذ الذين أحرزوا ١٠ درجات؟

هل باستطاعتك الإجابة عن تلك الأسئلة بمجرد النظر إلى تلك البيانات بالصورة التي عرضت بها؟

ما أن تتم عملية جمع البيانات حتى يستلزم الالتفات إلى مسألة استخلاص المعلومات التي تتضمنها تلك البيانات، حيث أنه من غير الممكن أو من الصعب الحصول على المعلومات المطلوبة من البيانات خاصة إذا كانت كثيرة العدد، إذ تبذل جهود كبيرة لتنظيمها وإعادة عرض البيانات بطرائق مختلفة منها:

١) الجداول التكرارية.

٢) الصور البيانية.

٣) التمثيل بالأعمدة.

٤) التمثيل بالدائرة.

عرض البيانات بالجداول التكرارية:

مثال (١):

أراد تلاميذ الصف السادس وعددهم ٢٨ تلميذاً شراء هدية لأستاذهم بمناسبة تقاعده للمعاش. فكتب كل تلميذ اسم الهدية التي يراها مناسبة في قطعة من الورق وكانت كالآتي:

كتاب	نظارة	قلم	كتاب	ساعة	كتاب	حقيبة
نظارة	كتاب	نظارة	حقيبة	كتاب	نظارة	كتاب
كتاب	نظارة	ساعة	كتاب	قلم	كتاب	نظارة
كتاب	ساعة	كتاب	حقيبة	نظارة	ساعة	كتاب

جدول (٢)

كيف يستطيع التلاميذ تحديد نوع الهدية؟

باستطاعة التلاميذ تحديد نوع الهدية بمجرد النظر لهذه الأوراق أو يحتاجون لتنظيم المعلومات (البيانات) التي تحويها هذه الأوراق.

تم تكوين لجنة لمعرفة نوع الهدية التي اختارها التلاميذ وقامت اللجنة بتكوين جدول يوضح الحقائق كالآتي:

ساعة	////	٤
نظارة	~~////~~ //	٧
قلم	//	٢
كتاب	~~////~~ ~~////~~ //	١٢
حقيبة	///	٣

جدول (٣)

التصويت لاختيار الهدية

(الرمز ~~////~~ تعني ٥ لتسهيل العد)

١) كم عدد التلاميذ الذين اختاروا النظارة هدية لأستاذهم؟
٢) كم عدد التلاميذ الذين اختاروا الساعة هدية لأستاذهم؟
٣) كم عدد التلاميذ الذين اختاروا الكتاب هدية لأستاذهم؟
٤) كم عدد التلاميذ الذين اختاروا القلم هدية لأستاذهم؟
٥) كم عدد التلاميذ الذين اختاروا الحقيبة هدية لأستاذهم؟
٦) أيهما أسهل للإجابة على الأسئلة السابقة من الجدول (٣) أم من الأوراق؟
٧) ما الهدية التي اختارها أكبر عدد من التلاميذ لأستاذهم؟

عندما تنظم المعلومات أو البيانات بطريقة تسهل فهمها واستخلاص النتائج منها، نقول إننا عرضنا تلك البيانات.

الأعداد الموضحة في الجدول (٣) تسمّى **التكرارات** ويسمّى الجدول (٣) **الجدول التكراري** ويمكن إعادة تكوينه في الصورة الآتية:

النوع	المفردات	التكرارات
ساعة	////	٤
نظارة	~~////~~ //	٧
قلم	//	٢
كتاب	~~////~~ ~~////~~ //	١٢
حقيبة	///	٣

جدول (٤)

مثال (٢):

البيانات التالية عبارة عن أوزان تلاميذ الصف الأول متوسط بالكيلو جرام.

٣٥	٤٠	٣١	٣٧	٣٥	٤٠	٣٢	٤٠	٣١	٤٠
٤٠	٣١	٤٠	٣٥	٣٧	٣٢	٣٥	٤٠	٣٧	٣٢
٣٥	٣٢	٣٥	٤٠	٣٢	٤٠	٣٧	٣١	٤٠	٣٧

جدول (٥)

اعرض هذه البيانات في جدول تكراري ومن ثم أجب عن الأسئلة التالية:

١) كم مرة تكرر الوزن ٣١ كيلو جرام؟
٢) كم تكرر الوزن ٣٧ كيلو جرام؟
٣) كم عدد التلاميذ الذين أوزانهم ٣٥ كيلو جرام؟
٤) كم عدد التلاميذ الذين أوزانهم ٤٠ كيلو جرام؟
٥) ما مجموع التكرارات؟
٦) كم عدد تلاميذ هذا الصف؟
٧) ما أقل التلاميذ وزناً وأكبر التلاميذ وزناً؟

الحل:

عرض الأوزان في جدول تكراري:

الأوزان بالكيلو جرام	المفردات	التكرارات
٣١	////	٤
٣٢	𝍸	٥
٣٥	𝍸 /	٦
٣٧	𝍸	٥
٤٠	𝍸 𝍸	١٠

جدول (٦)

١) تكرر الوزن ٣١ كيلو جرام ٤ مرات.
٢) تكرر الوزن ٣٧ كيلو جرام ٥ مرات.
٣) عدد التلاميذ الذين أوزانهم ٣٥ كيلو جرام ٦ تلاميذ.
٤) عدد التلاميذ الذين أوزانهم ٤٠ كيلو جرام ١٠ تلاميذ.
٥) مجموع التكرارات ٣٠ تلميذاً.
٦) عدد تلاميذ الصف ٣٠ تلميذاً.
٧) أقل التلاميذ وزناً هو ٣١ كيلو جرام. وأكبر التلاميذ وزناً هو ٤٠ كيلو جرام.

تمرين (٨ - ٢)

١) قم بزيارة المركز الصحي بقريتك أو حيك واجمع بيانات عدد المرضى خلال أسبوع ثم اعرضها في جدول ومن ثم أجب عن الآتي:

أ . ما اليوم الذي ارتاد فيه المركز الصحي أقل عدد من المرضى؟

ب. ما اليوم الذي ارتاد فيه المركز الصحي أكبر عدد من المرضى؟

جـ. ما الفرق بين مرضى اليومين؟

٢) البيانات التالية توضح أجور عمال اليومية بالجنيه السوداني في مصنع من المصانع:

٢٠٠٠	٢٥٠٠	٢٠٠٠	٢٧٠٠	٢٣٠٠	٢٥٠٠	٢٠٠٠	٢٧٠٠	٢٥٠٠
٢٥٠٠	٢٣٠٠	٢٥٠٠	٢٠٠٠	٢٥٠٠	٢٣٠٠	٢٥٠٠	٢٥٠٠	٢٠٠٠
٢٥٠٠	٢٦٠٠	٢٧٠٠	٢٦٠٠	٢٧٠٠	٢٠٠٠	٢٦٠٠	٢٧٠٠	٢٥٠٠
٢٠٠٠	٢٣٠٠	٢٥٠٠	٢٧٠٠	٢٠٠٠	٢٥٠٠	٢٥٠٠	٢٠٠٠	٢٣٠٠

جدول (٧)

أ . كوّن جدولاً تكرارياً يوضح الأجور وعدد العمال.

ب. كم عدد العمال الذين يتقاضون أقل أجر؟

جـ. كم عدد العمال الذين يتقاضون أكبر أجر؟

د. كم عدد عمال المصنع؟

٣) أكمل الجدول التكراري الآتي وهو عبارة عن بيانات حركة عبور كبري أم الطيور بمدينة الدامر رصدتها شرطة المرور خلال ساعة.

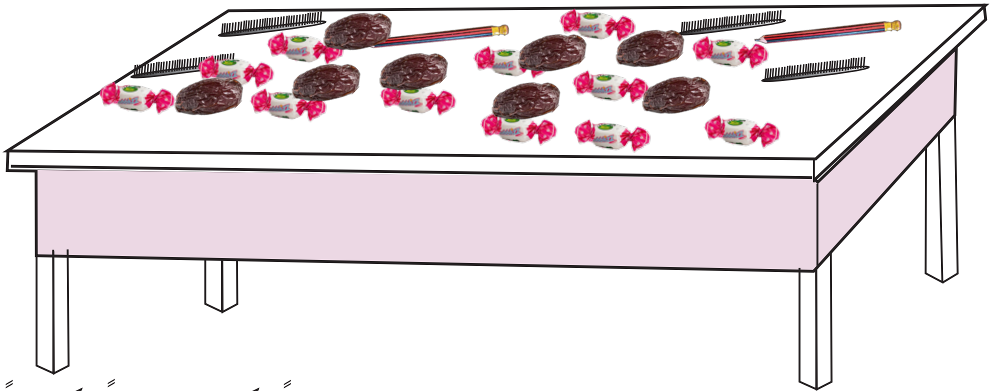
النوع	المفردات	التكرارات
دراجة	~~////~~ /	
دراجة نارية		١٣
سيارة	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ //	
حافلة		٨
ناقلة	~~////~~ ////	

جدول (٨)

(٨ - ٣) عرض البيانات بالصور البيانية

مثال (١):

لو طلب منك معرفة عدد كل نوع من أنواع الأشياء التي على هذه المنضدة، فأول خطوة تقوم بتنفيذها هي عد هذه الأشياء كل على حدة.



ولتسهيل عملية استخلاص النتائج كما تعلمنا سابقاً نكوّن جدولاً تكرارياً يوضح توزيع ما على المنضدة من أشياء كما هو موضح في الجدول التالي:

النوع	المفردات	التكرارات
قلم	//	٢
بلح	//// ///	٨
مشط	////	٤
حلوى	//// //// //	١٢

جدول (١)

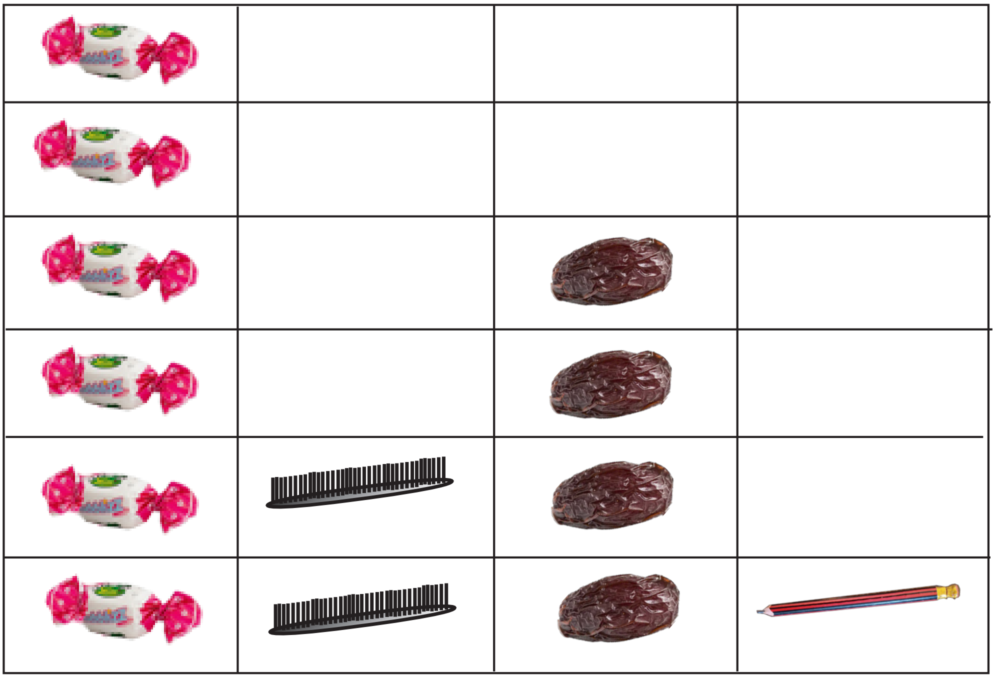
ولتوضيح هذه المعلومات أكثر يمكن تمثيلها بصور بيانية وهي تساعدنا كثيراً في مقارنة الأشياء بسرعة، واستخلاص المعلومات المهمة.

ولتمثيل البيانات في الجدول (١) بصور بيانية نتبع الخطوات التالية:

١) نحدد صورة مناسبة لتمثيل البيانات فيمكن اختيار صورة الأشياء الحقيقية للأشياء على المنضدة.

٢) نحدد عدد الصور التي تمثل كل عدد من الأشياء التي بالجدول (١) فصورة القلم الواحد تمثل قلمين وهكذا بقية الأشياء.

تمثيل الجدول (١) بالصور البيانية:

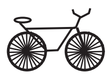


عنما نمثل البيانات بصورة نقول إننا عرضنا هذه البيانات بالصورة البيانية.

مثال (٢):

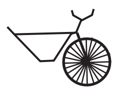
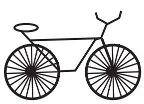
اختر ما يناسب من الرموز لتمثيل ١٨ دراجة، و١٢ ولداً، و٤ بنات بالصور البيانية.

الحل:

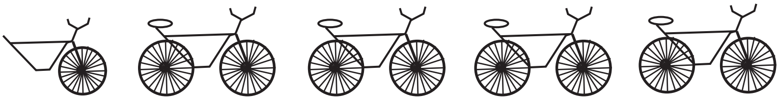
افرض أن الرمز  يمثل ٤ دراجات.

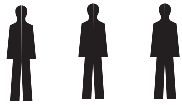
والرمز  يمثل ٤ أولاد.

والرمز  يمثل ٤ بنات.

والرمز  يمثل نصف العدد الذي يمثله الرمز 

وعليه نوضح ما سبق على النحو التالي:

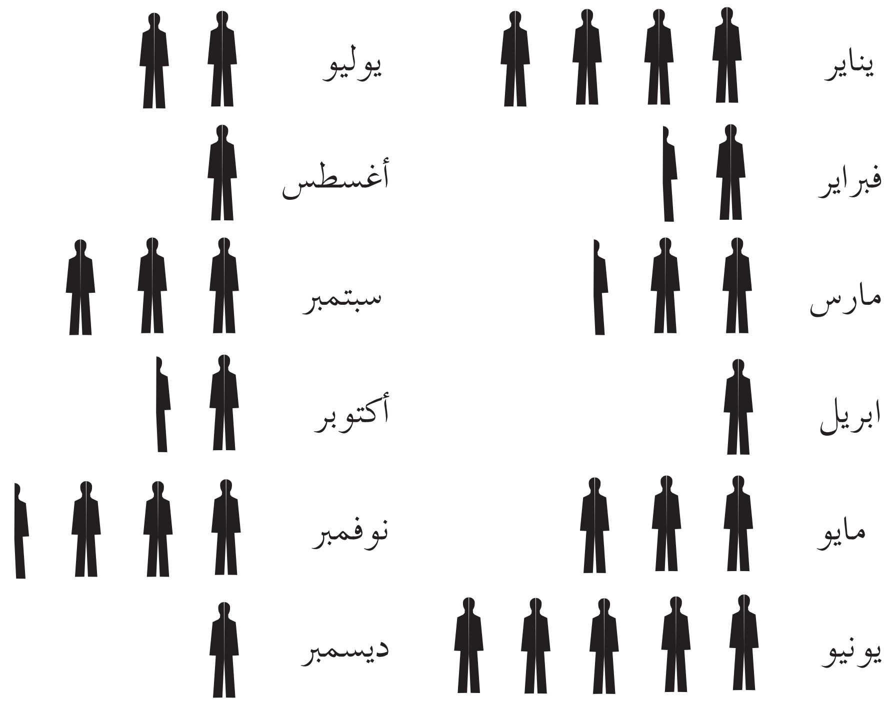
الدراجات: 

الأولاد: 

البنات: 

مثال (٣):

الصور التالية توضح عدد مواليد كل شهر في قرية ما:



مقياس الرسم:  يمثل ١٠ مواليد

 يمثل ٥ مواليد

مستعيناً بعرض البيانات بالصور البيانية السابقة أجب عن الأسئلة التالية:
١) كم مولوداً في شهر فبراير؟
٢) ما الشهر الذي ولد فيه أقل عدد من المواليد؟
٣) ما الشهر الذي ولد فيه أكبر عدد من المواليد؟
٤) ما الفرق بين عدد مواليد مايو ومارس؟
٥) كم مجموع مواليد يوليو وأغسطس وأكتوبر؟
٦) أيهما أكبر عدداً مجموع مواليد يناير وابريل وديسمبر أم مواليد سبتمبر ونوفمبر؟ وكم الفرق؟

الحل:
١) عدد مواليد شهر فبراير = ١٥ مولوداً
٢) أقل عدد من المواليد ولد في ابريل وأغسطس وديسمبر.
٣) أكبر عدد من المواليد ولد في شهر يونيو.
٤) الفرق بين عدد مواليد مايو ومارس = ٣٠ – ٢٥ = ٥ مواليد
٥) مجموع مواليد يوليو وأغسطس وأكتوبر
= ٢٠ + ١٠ + ١٥ = ٤٥ مولوداً
٦) مواليد يناير وابريل وديسمبر = ٤٠ + ١٠ + ١٠ = ٦٠ مولوداً
مواليد سبتمبر ونوفمبر = ٣٠ + ٣٥ = ٦٥ مولوداً
∴ مواليد سبتمبر ونوفمبر أكبر عدداً
الفرق = ٦٥ – ٦٠ = ٥ مواليد

تمرين (٨ – ٣)

(١) الجدول الآتي يوضح إنتاج مصنع صلصة معلبة ما خلال أسبوع:

اليوم	الإنتاج بالعلبة
الاحد	٨٠
الاثنين	٩٥
الثلاثاء	١٠٠
الأربعاء	٧٥
الخميس	٦٠
الجمعة	٥٥
السبت	٨٥

جدول (٢)

اختر ما يناسب من الصور ومثل الجدول بالصور البيانية بمقياس رسم مناسب ومن ثم أجب عن الآتي:

أ . ما اليوم الذي أنتج فيه المصنع أقل عدد من علب الصلصة؟

ب. ما اليوم الذي أنتج فيه المصنع أكبر عدد من علب الصلصة؟

(٢) في أحد الأعوام كان عدد الجالسين لامتحان الشهادة الثانوية في بعض الولايات على النحو التالي:

الولاية	عدد الجالسين
نهر النيل	٩٠٠٠
غرب دارفور	١١٥٠٠
البحر الأحمر	١٢٠٠٠
شمال كردفان	٧٥٠٠

الجدول (٣)

مستعيناً بالرمز ليرمز لـ ١٠٠٠ جالس اعرض بيانات الجدول بالصور البيانية.

(٣) اختر ما يناسب من الصور وبمقياس رسم مناسب اعرض البيانات الآتية بالصور البيانية. حظيرة حيوانات بها الأعداد الآتية من أنواع الحيوانات المختلفة:

الضأن	٢٠ من الضأن
الماعز	١٦ من الماعز
الأبقار	١٠ بقرات
الإبل	٨ من الإبل
الغزلان	٤ من الغزلان

الجدول (٤)

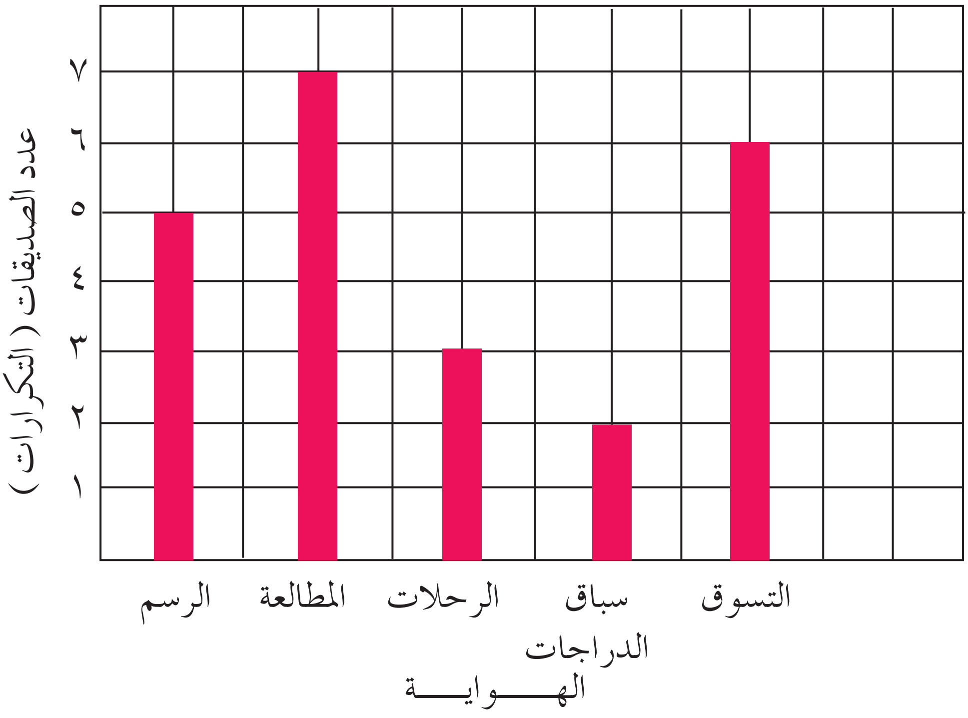
(٨ – ٤) عرض البيانات بالأعمدة

قامت سحر بسؤال مجموعة من صديقاتها في الصف عن هواياتهن المفضلة وجمعت المعلومات في الجدول الآتي:

الهواية	عدد الصديقات (التكرارات)
الرسم	٥
المطالعة	٧
الرحلات	٣
سباق الدراجات	٢
التسوّق	٦

جدول (١)

ثم قامت بعرض المعلومات التي في الجدول (١) السابق بالطريقة التالية:



الشكل (١)

تسمى الطريقة التي مثلت بها البيانات في الشكل (١) بالتمثيل البياني بالأعمدة وتساعد هذه الطريقة في سرعة قراءة البيانات، والمقارنة بينهما بطريقة سهلة.
ولتمثيل البيانات السابقة بالأعمدة البيانية نتبع الخطوات التالية:

١) رسم المحورين الأفقي والرأسي.
٢) اجعل المحور الأفقي يمثل الهوايات، والمحور الرأسي يمثل التكرارات.
٣) خذ مقياس رسم مناسب للمحور الرأسي الذي يمثل التكرارات، وقسّم المحور الأفقي إلى أقسام متساوية البعد بينها يساوي ٢ سم مثلاً، وضع نقاطاً تدل على ذلك.
٤) مثّل الهوايات على المحور الأفقي بحيث تمثل كل هواية بعمود أو مستطيل، قاعدته منطبقة على المحور الأفقي وارتفاعه يقابل العدد الدال على التكرار، ويفضل أن تكون قواعد المستطيلات متساوية حفاظاً على الناحية الجمالية للشكل، وأن المقارنة تكون مبنية على مساحة المستطيلات.
٥) يكتب عنوان للرسم في أعلى الرسم البياني.

مثال:

الجدول أدناه يوضح عدد تلاميذ كل صف بإحدى المدارس الابتدائية:

الصف	عدد التلاميذ
الأول	٢٠
الثاني	٣٠
الثالث	٥٠
الرابع	٢٠
الخامس	٤٠
السادس	٦٠

جدول (٢)

المطلوب: مثّل البيانات السابقة بيانياً بالأعمدة.

ومن الرسم البياني الذي رسمته أجب عن الأسئلة الآتية:

١) ما عدد تلاميذ الصف الثاني؟
٢) أي الصفوف به ٢٠ تلميذاً؟
٣) أي الصفين به أكبر عدد من التلاميذ، الثالث أم الخامس؟
٤) أي الصفوف أقل عدداً من بين الصفوف؟ وأيها أكثر عدداً؟
٥) كم مجموع تلاميذ المدرسة؟

الحل:

الشكل (٢)

١) عدد تلاميذ الصف الثاني = ٣٠ تلميذ
٢) الصفوف التي بها ٢٠ تلميذاً هي الأول والرابع.
٣) الصف الذي به أكبر عدد من التلاميذ هو الصف الثالث.
٤) الصفوف التي بها أقل عدد من التلاميذ هي الأول والرابع. الصفوف التي بها أكثر عدد من التلاميذ هي الصف السادس فقط .
٥) مجموع تلاميذ المدرسة = ٢٢٠ تلميذ

تمرين (٨ – ٤)

١) الجدول التالي يوضح ما ادخره أدروب بالجنيهات خلال الشهور الخمسة الأولى من العام:

الشهر	الادخار بالجنيه
يناير	٢٠٠٠
فبراير	٤٠٠٠
مارس	١٠٠٠
ابريل	٥٠٠٠
مايو	٨٠٠٠

جدول (٣)

مثّل البيانات السابقة بيانياً بالأعمدة ثم أجب عن الآتي:

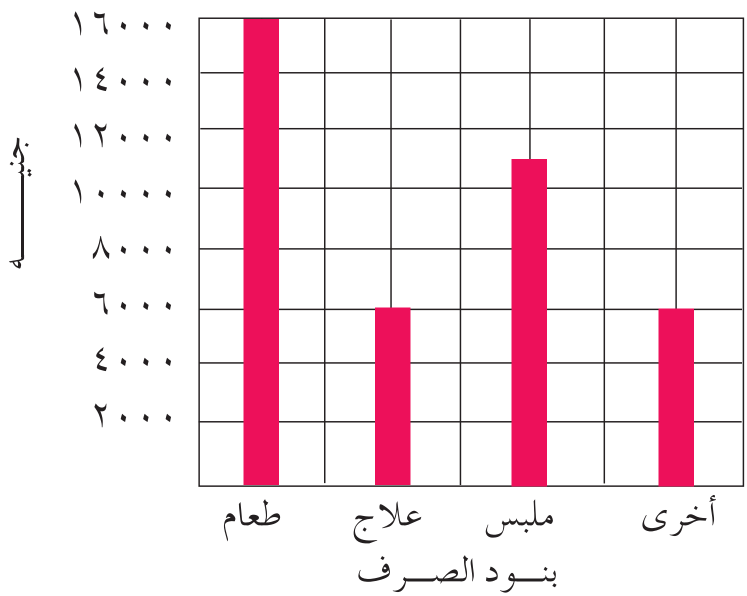
أ . ما أكبر مبلغ ادخره؟ وما أقل مبلغ ادخره؟

ب. كم مجموع ما ادخره في الشهور الخمسة ؟

٢) الشكل التالي يوضح توزيع الدخل الشهري لرب أسرة.

مقياس الرسم على الخط الرأسي:

١ سم ≡ ٢٠٠٠ جنيه



الشكل (٣)

أ . ما البند الذي صرف عليه الأب أكبر كمية من الجنيهات؟
ب. كم صرف الأب على الملبس؟
جـ. ما دخل الأب الشهري؟
د . ارسم جدولاً تكرارياً لهذا الصرف.

٣) راقب أحد التلاميذ حركة السيارات العابرة بنقطة عبور جبل أولياء القادمة من مدينة الخرطوم خلال ساعة واحدة وقام بحصرها حسب أنواعها حسب الجدول التالي:

النوع	العدد
بص	١٠
بوكس	٨
تاكسي	٣
شاحنة	٦
لوري	٤

جدول (٤)

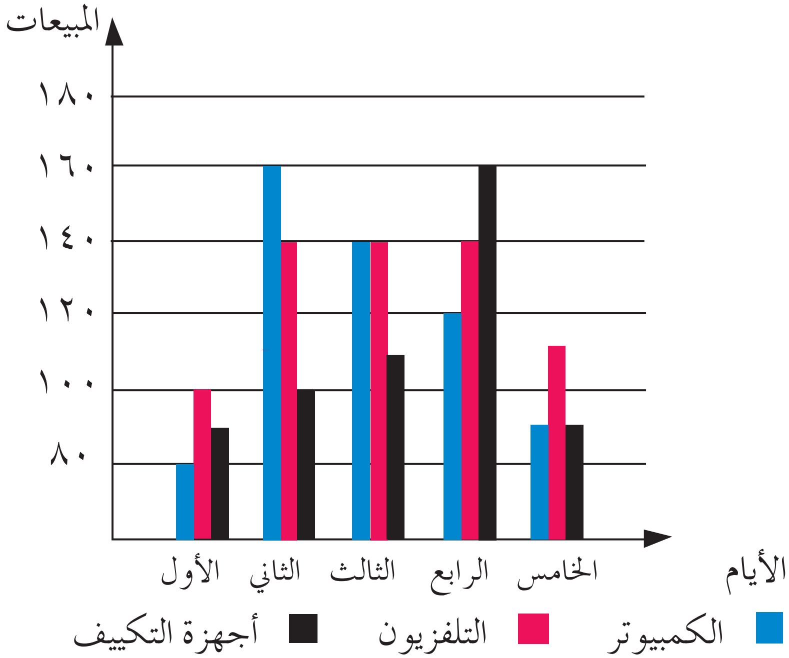
بمقياس رسم مناسب ارسم رسماً بيانياً بالأعمدة لهذا الجدول.

٤) حصل تلميذ على الدرجات الآتية في ٧ اختبارات في مادة الرياضيات درجته القصوى ٤٠ درجة

٢٥ ٤٠ ٣٠ ٣٥ ٢٠ ٤٠ ٣٠

ارسم رسماً بيانياً بالأعمدة لهذه الدرجات.بمقياس رسم:
١ سم ≡ ١٠ درجات

٥) الشكل التالي يوضح مبيعات الكمبيوتر، التلفزيون، وأجهزة التكييف بآلاف الجنيهات في أحد المحلات التجارية في خمس أيام متتالية:



الشكل (٤)

أ . ما اليوم الذي تتساوى فيه مبيعات التلفزيون والكمبيوتر؟

ب. ما اليوم الذي تتساوى فيه مبيعات الكمبيوتر وأجهزة التكييف؟

جـ . ما اليوم الذي تزيد فيه مبيعات الكمبيوتر عن التلفزيون؟

د . ما اليوم الذي تزيد فيه مبيعات أجهزة التكييف عن الكمبيوتر؟

٦) البيانات الآتية توضح درجات تلاميذ في امتحان اللغة العربية درجته القصوى ٥٠ درجة .

٣٠	٥٠	١٠	٢٠	٣٠	٥٠	٤٠	٢٠
٥٠	٤٠	١٠	٣٠	٥٠	٤٠	٢٠	٣٠
٤٠	١٠	٥٠	٥٠	٤٠	٣٠	٥٠	١٠
٢٠	٥٠	١٠	١٠	٣٠	٤٠	٣٠	٥٠

جدول (٥)

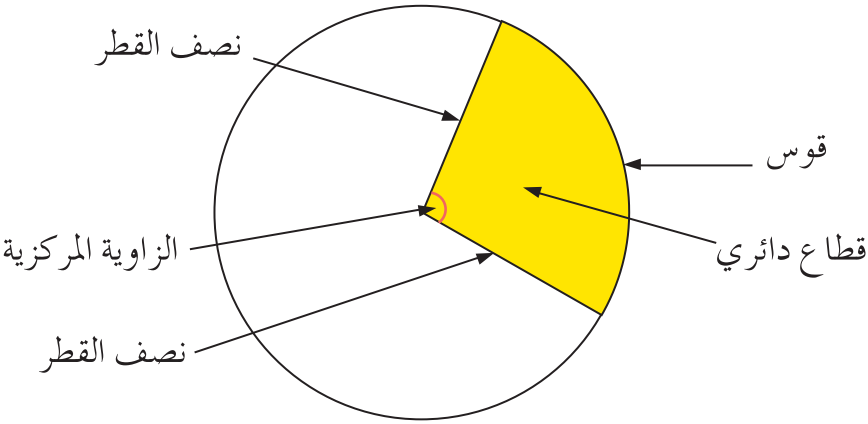
١. كوّن جدولاً تكرارياً لتوزيع هذه الدرجات.

٢. بمقياس رسم مناسب ارسم رسماً بيانياً بالأعمدة للجدول الذي كوّنته.

(٨ – ٥) تمثيل البيانات بطريقة القطاعات الدائرية

احياناً يتوزع المجتمع الاحصائي إلى عدة اجزاء مختلفة. وفي هذه الحالة قد نلجأ إلى تمثيل هذه الاجزاء بقطاعات من دائرة واحدة تمثل المجموع الكلي لبيانات المجتمع الاحصائي. وتكون مساحات هذه القطاعات الدائرية متناسبة مع الارقام الاحصائية المطلوب بيانها.

ولما كان القطاع الدائري هو جزء من مساحة الدائرة محصور بين نصفي قطرين وقوس من هذه الدائرة كما يبينه الشكل (١)



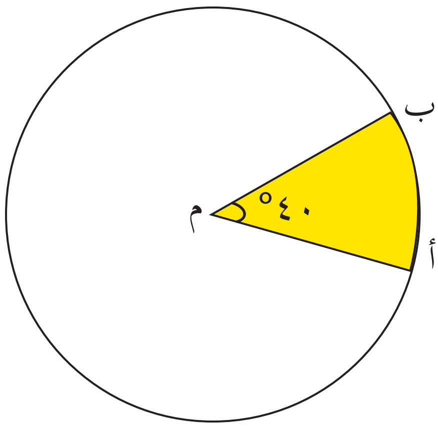
الشكل (١)

فإن القطاعات الدائرية المرسومة في اي دائرة تتلاقى رؤوسها عند مركز الدائرة. ومساحة كل قطاع تتناسب مع مقدار زاوية رأسه عند مركز الدائرة (الزاوية المركزية).

ولما كان مجموع الزوايا المركزية كلها ٣٦٠° فإننا نقسم هذا العدد من الدرجات تقسيماً متناسباً مع الارقام الاحصائية التي نريد توضيحها، فيتحدد ذلك بزوايا القطاعات التي تمثل هذه الارقام. ولكي نرسم قطاعاً دائرياً زاويته المركزية ٤٠° نتبع الخطوات الآتية:

١. نرسم دائرة مركزها (م) بنصف قطر مناسب.
٢. نرسم نصف قطر م أ.
٣. نرسم بالمنقلة ∢أ م ب = ٤٠°، بحيث تكون ب على الدائرة.

ويكون القطاع الدائري المطلوب هو الجزء المظلل في الشكل (٢)



الشكل (٢)

مثال (١): اجرينا احصاء عن جنسية المسافرين في إحدى رحلات الخطوط الجوية السودانية وأنشأنا الجدول (١) الآتي:

الجنسية	التكرار
سودانية	٦٠
سعودية	٤٠
قطرية	٢٠
مصرية	٥٠
سورية	١٠
المجموع	١٨٠

جدول (١)

ولزيادة الأمر وضوحاً مثلنا الجنسيات المختلفة بقطاعات دائرية تتناسب مساحتها أو زواياها مع تكرار الجنسية المعينة. مثلاً:

السودانيون ٦٠ من ١٨٠ وبما أن ١٨٠ تقابلها ٣٦٠° من الدائرة، لذلك فإن ٦٠ تقابلها ١٢٠ لأن:

$$\frac{٦٠}{١٨٠} = \frac{١٢٠}{٣٦٠}$$ (الكسور المتكافئة)

أو $$٣٦٠ \times \frac{٦٠}{١٨٠} = ١٢٠^{\circ}$$

لذلك نمثل السودانيين بقطاع دائري زاويته المركزية = ١٢٠°
كذلك نمثل السعوديين بقطاع دائري زاويته المركزية

$$= ٣٦٠ \times \frac{٤٠}{١٨٠} = ٨٠^{\circ}$$

والقطريون بقطاع دائري زاويته

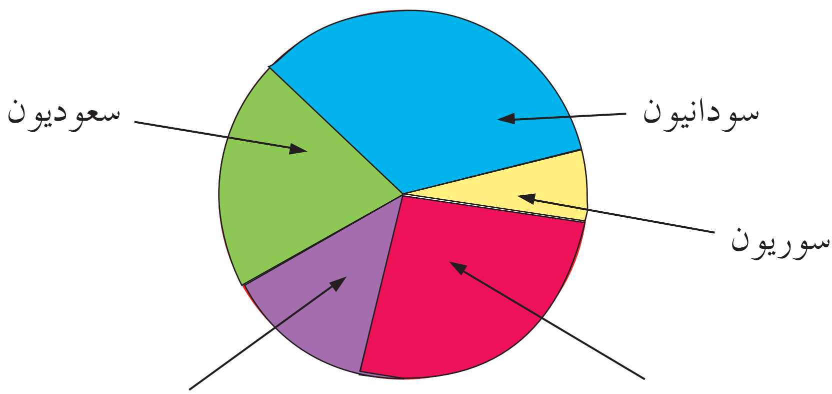
$$= ٣٦٠ \times \frac{٢٠}{١٨٠} = ٤٠^{\circ}$$

والمصريون بقطاع دائري زاويته

$$= ٣٦٠ \times \frac{٥٠}{١٨٠} = ١٠٠^{\circ}$$

والسوريون بقطاع دائري زاويته

$$= ٣٦٠ \times \frac{١٠}{١٨٠} = ٢٠^{\circ}$$



الشكل (٣)

الشكل أعلاه يسمّى تمثيل البيانات الاحصائية بطريقة القطاعات الدائرية.

مثال (٢): اشترى اسماعيل وطه وبراءة فطيرة بيتزا ثمنها ٨٠٠ جنيه، فدفع اسماعيل ٤٠٠ جنيه ودفع طه ٢٤٠ جنيه ودفعت براءة باقي الثمن. حيث قسمت بمقدار ما دفعه كل منهم، وضح نصيب كل واحد بطريقة القطاعات الدائرية.

الحل: جملة المبلغ ٨٠٠ جنيه

ما دفعه اسماعيل ٤٠٠ جنيه

ما دفعه طه ٢٤٠ جنيه

∴ ما دفعته براءة = ٨٠٠ − (٤٠٠ + ٢٤٠) = ١٦٠ جنيه

وبما أن ٨٠٠ جنيه تمثيلها في الدائرة ٣٦٠°

∴ الزاوية المركزية للقطاع الذي يمثل نصيب اسماعيل

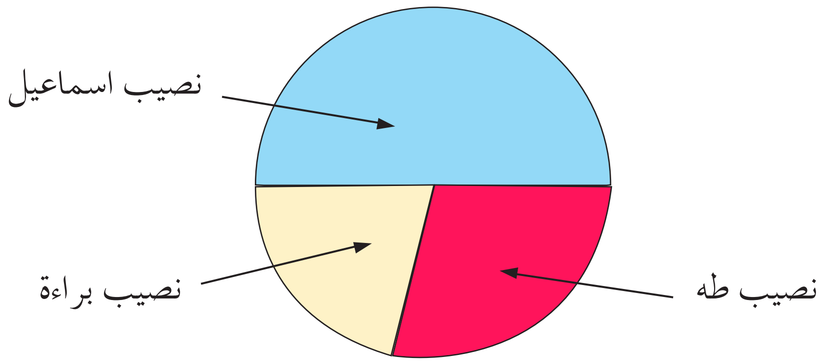
$$= ٣٦٠ \times \frac{٤٠٠}{٨٠٠} = ١٨٠^\circ$$

الزاوية المركزية للقطاع الذي يمثل نصيب طه

$$= ٣٦٠ \times \frac{٢٤٠}{٨٠٠} = ١٠٨^\circ$$

الزاوية المركزية للقطاع الذي يمثل نصيب براءة

$$= ٣٦٠ \times \frac{١٦٠}{٨٠٠} = ٧٢^\circ$$



الشكل (٤)

حل آخر:

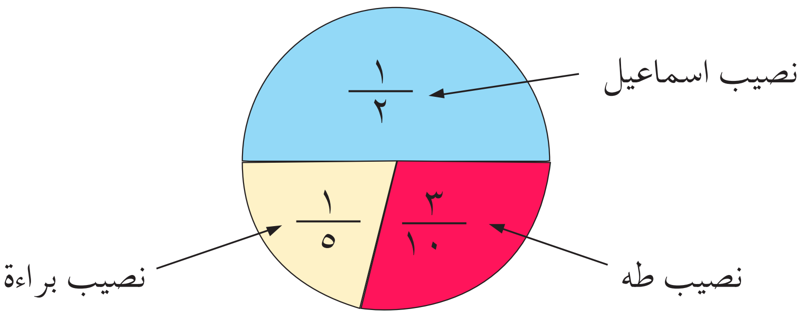
جملة المبلغ = ٨٠٠ جنيه

ما دفعته براءة = ٨٠٠ − (٤٠٠ + ٢٤٠) = ١٦٠ جنيه

نصيب اسماعيل = $\frac{٤٠٠}{٨٠٠}$ من الفطيرة = $\frac{١}{٢}$ الفطيرة

نصيب طه = $\frac{٢٤٠}{٨٠٠}$ من الفطيرة = $\frac{٣}{١٠}$ الفطيرة

نصيب براءة = $\frac{١٦٠}{٨٠٠}$ من الفطيرة = $\frac{١}{٥}$ الفطيرة



شكل (٥)

تمرين (٨ – ٥)

(١) قامت انتصار بتوزيع مبلغ ٦٠٠٠٠ جنيه على ثلاث أسر فقيرة وكان نصيب كل أسرة حسب عدد أفرادها موضح في الجدول أدناه:

الأسرة	الأولى	الثانية	الثالثة
نصيب الأسرة	٣٠٠٠٠	٢٠٠٠٠	١٠٠٠٠

جدول (٢)

مثّل البيانات السابقة في رسم بياني بطريقة القطاعات الدائرية.

(٢) في بحث ميداني بأحد الأحياء وجد أن أنواع وقود الطهي المستخدمة في المنازل على النحو التالي:

غاز	٥٠ ٪
كهرباء	٥ ٪
فحم	٣٠ ٪
حطب	١٥ ٪

جدول (٣)

وضّح هذا التوزيع برسم بياني بطريقة القطاعات الدائرية.

(٣) الجدول التكراري التالي يبيّن توزيع درجات تلاميذ الصف الأول متوسط في اختبار لمادة الرياضيات. مثّل هذا الجدول في رسم بياني بطريقة القطاعات الدائرية.

الدراجات	٠	١٠	٢٠	٣٠	٤٠	٥٠
التكرارات	٢	٤	٧	١٥	٩	٣

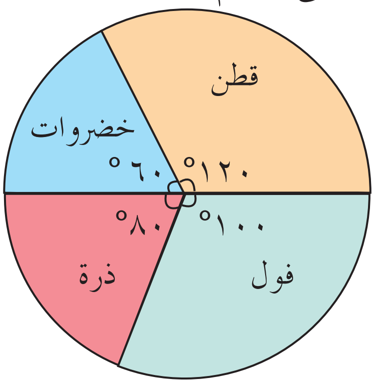
جدول (٤)

ومن ثم أجب عن الأسئلة التالية:

أ . كم عدد التلاميذ الذين احرزوا درجات أقل من ١٠ درجات؟

ب. أيهما أكثر عدد التلاميذ الناجحين أم التلاميذ الراسبين إذا كانت درجة النجاح ٣٠ درجة؟

٤) الشكل التالي يمثل رسماً بيانياً بطريقة القطاعات الدائرية، يوضح توزيع مساحة مزرعة للمحصولات المبينة على الرسم.



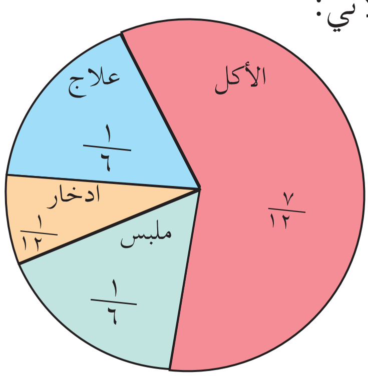
الشكل (٦)

أ . أيهما أكبر مساحة الأرض المزروعة قطن أم المزروعة فول ؟

ب. أيهما أصغر مساحة الأرض المزروعة خضروات أم المزروعة ذرة ؟

جـ. إذا كانت مساحة المزرعة ١٢ فداناً، فكم المساحة المزروعة خضروات ؟

٥) الشكل أدناه يمثل توزيع الدخل الشهري لإحدى الأسر عدد أفرادها ستة، ادرس الشكل ثم أجب عن الآتي:



الشكل (٧)

أ . في أي الجوانب تصرف هذه الأسرة أكثر وفي أيها تصرف أقل ؟

ب. إذا كان الدخل الشهري لهذه الأسرة هو ٣٠٠٠٠ جنيه شهرياً جد ما تدخره شهرياً ؟

جـ . ما البند الذي سينقص في الشكل إذا زاد عدد أفراد الأسرة شخصين، وظل الدخل ثابتاً ؟

٦) ينفق طالب جامعي مصروفه الشهري والبالغ ١٨٠٠٠ جنيه كالآتي:

$\frac{١}{٦}$ المبلغ للمواصلات.

$\frac{١}{٩}$ المبلغ للكتب والمذكرات.

$\frac{٢}{٣}$ المبلغ للأكل.

والباقي للترفيه.

أ . مثّل ذلك بقطاعات دائرية.

ب. كم جنيهاً أنفقها الطالب خلال هذا الشهر للمواصلات والترفيه ؟